IL GIARDINO DI PITAGORA

Luigi Salce

PREFAZIONE

Sono dette terne pitagoriche quelle terne di numeri naturali (a, b, c) *tali che* $a^2 + b^2 = c^2$. *Il loro manifestarsi nella storia dell'umanitá ha origini fin dal III millennio a.C. e spazia dalla Mesopotamia all'Egitto, dalla Grecia alla Persia, dall'India alla Cina, nonché in molti siti megalitici in Inghilterra, come viene ampiamente documentato nel libro del 1983 di van der Waerden:* Geometry and algebra in ancient civilizations.

In questo racconto, dopo avere incontrato Pitagora nel suo giardino alle prese con quello che verrá chiamato dai posteri Teorema di Pitagora *, verranno presentate formule "parametriche" per produrre terne pitagoriche primitive, cioé senza divisori interi comuni di* a, b, c *maggiori di 1. Alcuni studiosi ritengono che fossero giá note in Mesopotamia alla fine del terzo millennio a.C.. Comparvero nel mondo greco con Platone, vennero perfezionate poi da Euclide nel III secolo a.C., e furono modificate e divulgate da Diofanto, matematico di Alessandria d'Egitto vissuto nel III secolo d.C.. Vedremo come le coppie di parametri generatori delle terne formano due alberi ternari nel primo quadrante del piano cartesiano, ottenuti tramite moltiplicazione delle coppie per tre matrici* 2×2 *a coefficienti interi a partire dalle coppie* $(2, 1)$ *e* $(3, 1)$.

Sará poi descritto un metodo completamente diverso per ottenere tutte le terne pitagoriche a partire da una delle due terne $(3, 4, 5)$ *e* $(4, 3, 5)$*; le terne si ottengono tramite moltiplicazione per tre matrici* 3×3 *a coefficienti interi. Questo modo di generare le terne, scoperto negli anni '60 del secolo scorso, produce delle configurazioni che sono visualizzabili nel piano cartesiano come due alberi ternari che si diramano nel primo quadrante, tra di loro simmetrici rispetto alla diagonale del primo quadrante. Alcune curiose proprietá delle terne pitagoriche sono facilmente deducibili da questo modo di ricavarle.*

Vedremo come gli alberi dei parametri e delle terne sono stati concepiti e come siano tra di loro interconnessi. Facendo poi uso di qualche nozione di base sui numeri complessi, introdurremo nell'insieme delle terne pitagoriche primitive una struttura di gruppo commutativo tramite una opportuna moltiplicazione. Vedremo che ogni terna pitagorica primitiva si scrive in un unico modo come prodotto, rispetto a tale moltiplicazione, di terne che hanno come diagonale un numero primo congruo ad 1 *modulo* 4.

Infine, a conclusione del nostro racconto, troveremo ancora Pitagora nel suo giardino a riflettere su quale sarebbe stato il suo destino una volta rientrato dopo la morte nel grande ciclo delle rinascite secondo la teoria della metempsicosi in cui credeva fermamente.

INDICE

AVVERTENZA. *Queste note sono dedicate agli studenti delle scuole superiori a cui piace la matematica. Gli unici strumenti matematici usati, oltre alle quattro operazioni elementari e alle estrazioni di radici quadrate, sono le moltiplicazioni tra matrici. Fa eccezione il quinto capitolo, in cui si usano nozioni di base sui numeri complessi e di teoria dei gruppi; é pertanto l'unico capitolo riservato a studenti che abbiano un pó di dimestichezza con queste nozioni. Il primo e l'ultimo capitolo possono interessare e forse divertire anche i non appassionati di matematica.*

Buona parte del materiale presentato é stato ricavato dalla tesi di Laurea Specialistica in Matematica presso l'Universitá di Padova "L'albero delle terne pitagoriche e la sua struttura gruppale" di Elena Carraretto, di cui sono stato relatore nell'A.A. 2008/2009.

I. INTRODUZIONE

I.1. Nel giardino di Pitagora

Correva l'estate dell'anno 529 a.C. nell'isola di Samo. Pitagora rifletteva seduto sulla panchina del suo giardino, tra due olmi che lo proteggevano con la loro ombra generosa dal caldo opprimente. Era di ritorno dal colloquio avuto con Policrate, il tiranno che comandava sull'isola. Pensava che non sopportava piú l'alterigia di quell'uomo e che avrebbe dovuto cominciare a pensare di andare a vivere altrove. Aveva sentito parlare tanto bene dei paesi della costa Jonica ed in particolare di Crotone, nella parte meridionale della penisola Italica, una zona che era stata colonizzata dagli Achei due secoli prima. Si ripromise di pensarci in modo piú approfondito al piú presto, in modo di poter organizzare il viaggio per mare una volta trascorso l'inverno. Per tirarsi su di morale, ripensó a quello che gli era balzato all'occhio guardando una delle piastrelle quadrate del pavimento della sala del palazzo di Policrate in cui aveva atteso di essere ricevuto in udienza dal tiranno. Le piastrelle erano quadrate, e quella che aveva attirato la sua attenzione era rotta esattamente lungo la diagonale. Si era allora immaginato che anche la piastrella superiore e le piastrelle a lato di quelle due fossero rotte lungo le diagonali, in modo da formare un quadrato messo sbieco avente per lati le quattro diagonali. Quello che lo aveva divertito era stata la constatazione che l'area di questo grande quadrato sbieco sarebbe stata equivalente alla somma delle aree di due piastrelle, essendo formato da quattro metá di queste. Usando un piccolo ramo raccolto da terra come stilo fece sul terreno, in un tratto privo d'erba, un disegno che rappresentava quello che si era raffigurato nella mente.

(vedi la Figura 1 di pag.37)

Si chiese allora, contemplando le siepi di tamerici che recintavano il giardino e gli alberi che vi crescevano rigogliosi e che creavano l'ambiente giusto per i suoi ripensamenti e per le sue intuizioni sui misteri della natura e dell'universo, se una regola analoga potesse valere per piastrelle rettangolari; non era poi cosí evidente che per una piastrella rettangolare il quadrato costruito sulla diagonale equivalesse alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

Sovvenne allora a Pitagora che nel corso del suo viaggio in Egitto aveva visto i tenditori di corde che riuscivano a tracciare sul limo lasciato dalle esondazioni del Nilo degli appezzamenti da affidare poi agli agricoltori delimitati da perimetri perfettamente rettangolari. Rivolgendosi ad un tenditore nel suo idioma, che aveva avuto il privilegio di imparare nel corso della sua amicizia col faraone Amasis II, chiese come riuscissero in questa impresa. Il tenditore, sospendendo il suo lavoro, gli aveva risposto che tracciavano su di un lungo canapo dei segni in modo che il primo segno comparisse a tre lunghezze dall'inizio del canapo, il secondo veniva fatto dopo altre quattro lunghezze, e il terzo e ultimo segno dopo altre cinque lunghezze. Sistemando i tre tratti del canapo piegandolo dove erano i segni in modo da formare un triangolo, erano sicuri che l'angolo formato dai due tratti minori era un angolo retto. Si potevano poi prolungare a piacimento i due tratti minori e completare il triangolo rettangolo tirandone l'ipotenusa. Era poi un gioco da ragazzi duplicare il triangolo lungo l'ipotenusa in modo da avere un appezzamento perfettamente rettangolare. Gli era stato anche spiegato dal tenditore che era di pubblico dominio tra i suoi colleghi che la ragione per cui questo metodo di tracciamento funzionava bene dando luogo ad angoli retti era il fatto che la somma delle aree dei quadrati costruiti a partire dai due lati di misura 3 e 4 dava lo stesso risultato che l'area del quadrato costruito sulla diagonale di misura 5. E aggiunse che, se voleva saperne di piú, poteva rivolgersi a qualche sacerdote del tempio. Come sempre, quando andava ai suoi ricordi del periodo egiziano, affiorava in lui una certa nostalgia. Con il piccolo ramo che gli fungeva da stilo, Pitagora disegnó allora sul terreno un triangolo rettangolo con i due cateti che misuravano 3 e 4 volte la lunghezza dello stilo, e controlló con soddisfazione che l'ipotenusa misurava 5 volte la lunghezza dello stilo. Pensó che la terna $(3, 4, 5)$ gli piaceva molto, e che sarebbe stato felice se il suo nome fosse stato associato a quella terna.

Non poteva certo immaginare allora Pitagora che il suo desiderio sarebbe stato esaudito e che da quel disegno fatto nel suo giardino sarebbero nati molti secoli dopo due alberi con un'infinitá di rami, in cui avrebbero trovato posto tutte le terne di numeri interi soddisfacenti alla regola che lui aveva appena intuito valere per i rettangoli e le loro diagonali e che sarebbero state chiamate in suo onore *terne pitagoriche.*

Quelle riflessioni riempirono di entusiasmo Pitagora, come sempre quando sentiva di essere prossimo a scoprire una nuova veritá. Si alzó con una certa eccitazione e quasi spinto da un presentimento si incamminó lungo il sentiero che portava all'uscita del giardino verso l'aperta campagna. Ai lati del cancello che interrompeva la siepe di tamerici e consentiva l'uscita nei campi c'erano due imponenti pioppi bianchi che aveva piantato ancora suo padre, e le loro foglie si agitavano alla brezza mostrando ora il lato verde scuro, ora il lato argentato, creando un affascinante gioco di luci e di colori. Notó per la prima volta che dove il tronco si ripartiva comparivano non due, ma tre grossi rami, e anche piú in alto le successive diramazioni erano tripartite. Voltandosi indietro e guardando i due olmi tra cui si trovava la panchina su cui prima stava seduto si accorse che anche quei due alberi, pur meno imponenti dei due pioppi, avevano diramazioni tripartite. Essendo convinto che alla base della realtá e di ogni cosa nell'universo ci sono i numeri, si chiese cosa ció potesse significare, senza riuscire a darsi una risposta. Prima del cancello, all'ombra dei due grandi pioppi bianchi, c'era uno spiazzo che un contadino aveva parzialmente ricoperto con dei mattoni rettangolari, formando un elegante motivo geometrico che alternava mattoni a riquadri liberi, nei quali l'erba faceva capolino. Lo spiazzo cosí ricoperto serviva perché i carri che arrivavano dai campi non lasciassero dei solchi con le loro ruote nel terreno umido dopo le piogge. E fu alla vista di quei mattoni a terra che Pitagora fu colto dall'illuminazione e tutto gli divenne chiaro.

(vedi la Figura 2 di pag.38)

Quel motivo geometrico, nel caso i mattoni fossero stati quadrati, avrebbe riprodotto il pavimento del palazzo di Policrate che aveva le piastrelle quadrate, ma, essendo i mattoni rettangolari, comparivano i piccoli quadrati di erba che nel palazzo di Policrate si riducevano ad un punto.

Guardando solo a quattro mattoni che formavano un grande quadrato, contenente al suo interno il piccolo quadrato in cui cresceva l'erba, si immaginó come aveva fatto la mattina nel palazzo di Policrate di tracciare le diagonali dei quattro mattoni, formando un nuovo quadrato ideale, avente per lati le quattro diagonali. Era evidente che l'area di questo quadrato era la somma delle aree del quadrato erboso e di quattro metá dei quattro mattoni che lo racchiudevano, ovvero di due mattoni. Prese allora un carboncino e scrisse delle lettere su uno dei mattoni su cui evidenzió la diagonale: con α inidicó il lato corto del mattone, con β il lato lungo e con γ la diagonale. Constatato che il lato del piccolo quadrato erboso misurava $\beta - \alpha$, prese il suo stilo e sul terreno scrisse questa formula:

$$\gamma^2 = (\beta - \alpha)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta.$$

Un immediato calcolo mentale gli permise di sostituire $(\beta - \alpha)^2$ con $\beta^2 + \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta$, per cui con lo stilo cancello dal terreno la quantitá $(\beta - \alpha)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta$ e la sostituí con $\alpha^2 + \beta^2$. Il cuore gli batté forte quando sul terreno comparve la formula

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

che dava una risposta positiva alla domanda che si era posto poc'anzi, ovvero, il quadrato costruito sulla diagonale di un triangolo rettangolo equivale alla somma dei quadrati costruiti sui lati.

Pitagora promise a sé stesso che per quella scoperta avrebbe sacrificato un bue agli dei, tale gli pareva l'importanza di quello che aveva appena compreso, e che avrebbe regalato il suo capretto piú grasso al contadino che aveva pavimentato lo spiazzo disponendo i mattoni in quel modo meraviglioso.

Il racconto che abbiamo appena visto é un misto di un pó di leggenda e di molta invenzione. Ad esempio, il fatto che Pitagora scrivesse formule come quelle su riportate é pura fantasia, perché la scrittura matematica nel VI secolo a.C. non consentiva certo formule algebriche di quel tipo. E' inoltre ben noto che il cosiddetto Teorema di Pitagora era conosciuto molto prima del VI secolo a.C. e si ritiene che la sua dimostrazione sia con ogni probabilitá successiva a Pitagora. E' quindi naturale porsi la seguente domanda: dove e quando nacquero quelle che universalmente sono oggi chiamate, in onore di Pitagora, terne pitagoriche?

I.2. Dove e quando nacquero le terne pitagoriche?

Diciamo subito che la risposta a questa domanda non é nota. Relativamente al "dove", sono talmente tanti i siti del nostro pianeta dove sono state trovate tracce evidenti dell'uso di terne pitagoriche che é impossibile stabilire un posto in cui fissarne l'origine; probabilmente i posti dove é nata questa nozione sono piú di uno. Anche relativamente al "quando" la risposta é molto incerta, potendosi risalire a tracce evidenti di terne pitagoriche ad un periodo a cavallo di III e II millennio a.C. in Mesopotamia, ma essendo anche noti monumenti megalitici in diverse parti del mondo che proverebbero l'uso di tali terne nella loro costruzione alcuni secoli prima.

Volendo entrare nel mondo delle terne pitagoriche, il punto di partenza per accostarle non puó comunque essere che il Teorema di Pitagora, quindi ripartiamo da dove abbiamo incominciato.

Qualunque studente delle scuole medie sa che, dato un triangolo rettangolo con i due cateti di lunghezza a e b e con l'ipotenusa di lunghezza c, vale l'uguaglianza:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Questo fatto era certamente noto in molte parti del nostro pianeta molto prima di Pitagora; era certamente conosciuto dai babilonesi fin dal III millennio a.C. col nome di "Regola della Diagonale".

Il punto cruciale che spiega l'utilitá che le terne pitagoriche hanno avuto nell'antichitá non é il Teorema di Pitagora, ma il suo viceversa che dice: se le lunghezze a, b e c dei tre alti di un triangolo soddisfano all'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$, allora il triangolo é necessariamente un triangolo rettangolo. Al giorno d'oggi ció si fa discendere dal cosiddetto Teorema del Coseno, che dice che in un triangolo con due lati di misura a e b e angolo compreso di α radianti, detta c la misura del terzo lato, risulta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ \alpha.$$

Perció, se vale l'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$, necessariamente $cos\alpha = 0$ e di conseguenza $\alpha = \pi/2$, ovvero, misurando gli angoli in gradi, $\alpha = 90^o$. La cosa era peró ben nota giá dai tempi di Euclide; infatti nel Libro I degli "Elementi", subito dopo del Teorema di Pitagora compare la Proposizione 48 che dice:"Se in un triangolo il quadrato di un lato é uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo compreso tra questi lati é retto." La dimostrazione, a partire da un triangolo di lati a, b e c soddisfacenti all'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$, costruisce un triangolo con lati $a' = a, b' = b$ formanti un angolo retto. Il terzo lato c', per il Teorema di Pitagora appena dimostrato, soddisfa all'uguaglianza $a'^2 + b'^2 = c'^2$; pertanto, essendo $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$, risulta $c' = c$. Allora i due triangoli, per il terzo criterio di uguaglianza tra triangioli, sono uguali, quindi l'angolo compreso tra i due lati a e b é retto.

Possiamo a questo punto provare a dare una risposta che, oltre che ragionevole, é anche storicamente attendibile, alla seguente domanda:

da dove nasce nell'antichitá l'interesse per le terne pitagoriche,
che si é manifestato palesemente in tutte la grandi civiltá ?

Per un architetto che voglia piantare un palo o una colonna verticalmente in modo che risulti perpendicolare al terreno, il metodo per procedere é molto semplice: si usa il filo a piombo che usa la forza di gravitá terrestre. Ma come procedere se pensiamo di voler tracciare sul terreno un angolo retto?

Questa era l'esigenza nell'antico Egitto dei "tiratori di corde", una categoria di lavoratori forse paragonabile ai "geometri" dei nostri giorni, molto importante sia nelle costruzioni architettoniche, come piramidi e templi, che, come abbiamo visto, in agrimensura, nel disegnare appezzamenti delimitati da angoli retti nel limo lasciato dal Nilo dopo le esondazioni e la successiva ritirata nel suo letto.

La curiositá che sorge ora naturalmente é la seguente: gli antichi Egizi e le civiltá che precedettero di molto Euclide e che usarono le terne pitagoriche conoscevano la dimostrazione dell'inverso del Teorema di Pitagora? La risposta é probabilmente negativa. Ma certamente chi ha usato terne pitagoriche era a conoscenza del fatto che esse davano garanzia che il triangolo costruito con i lati di quelle misure era un angolo retto.

Rimandiamo il lettore che volesse documentarsi sull'uso delle terne pitagoriche nell'antichitá al bel libro del 1983 di van der Waerden *Geometry and algebra in ancient civilizations.* Vi si racconta diffusamente come le terne pitagoriche furono usate agli albori della civiltá non solo nell'antico Egitto, ma in moltissimi altri posti: in Persia, Mesopotamia, Grecia, India e Cina; furono usate in svariate occasioni, associate spesso a qualche forma di culto, e nella costruzione di monumenti megalitici, fra cui quello molto noto di Stonehenge ed altri in Inghilterra.

Una volta appreso che le terne pitagoriche costituirono una conoscenza di primaria importanza in molte civiltá antiche, sorge spontanea la seguente domanda:

quante sono le terne pitagoriche tra di loro sostanzialmente diverse
ed é possibile trovare un sistema per individuarle tutte?

Per terne "sostanzialmente diverse" si intende terne che non siano multiple di una stessa terna; ad esempio, le terne $(6, 8, 10)$ e $(9, 12, 15)$ sono entrambi multiple della terna $(3, 4, 5)$, essendo la prima ottenuta moltiplicando $3, 4$ e 5 per 2, la seconda moltiplicando per 3. Una terna che non sia multipla di un'altra non ha nessun numero maggiore di 1 che divida i tre coefficienti della terna (o, equivalentemente due di essi) e viene detta terna *primitiva.*

Queste note vogliono introdurre un lettore profano di questi argomenti nell'affascinante mondo delle terne pitagoriche. Vediamo allora in sintesi come il nostro racconto si svilupperá. Apprenderemo nel secondo capitolo che esistono infinite terne pitagoriche primitive e troveremo una risposta esauriente anche alla seconda parte della domanda precedente. Verranno esposti infatti i metodi piú noti per trovare tutte le possibili terne primitive. Questi metodi, che risalgono ancora agli antichi Greci, e forse anche molto piú indietro agli antichi Babilonesi del III millennio a.C., generano le terne pitagoriche primitive a partire da coppie di parametri che soddisfano a certe semplici proprietá, e per questo vengono detti metodi delle *formule parametriche.* Vedremo poi come le coppie di parametri formano due alberi ternari rappresentabili nel primo quadrante del piano cartesiano, ottenuti moltiplicando ciascuna coppia per tre matrici 2×2 a coefficienti interi molto semplici. Le radici di questi due alberi, ovvero le coppie di parametri da cui si inizia, sono le coppie $(2, 1)$ e $(3, 1)$.

Il terzo capitolo sará interamente dedicato alla presentazione di un aspetto affascinante delle terne pitagoriche primitive, che rivela come anche per esse esistono strutture "ad albero ternario". Questi alberi si ottengono generando le terne tramite opportune matrici 3×3 a coefficienti interi a partire dalle terne $(3, 4, 5)$ e $(4, 3, 5)$. Trascurando la terza coordinata relativa alla diagonale, le coppie di coordinate relative ai cateti sono rappresentabili nel primo quadrante del piano cartesiano in cui producono pure alberi ternari. Effettueremo un esame approfondito di questi alberi e di alcuni loro rami, che riveleranno aspetti curiosi e interessanti dell'universo delle terne pitagoriche.

Nel quarto capitolo vedremo come gli alberi delle copie di parametri si possano dedurre da quelli delle terne primitive, e come i due tipi di alberi crescano in conformitá l'uno con l'altro.

Nel quinto capitolo, facendo ricorso al gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1, che viene usualmente chiamato col suggestivo nome di "toro", introdurremo nell'insieme di tutte le

terne primitive, a cui verrá aggiunta la terna "unitaria" $(1, 0, 1)$, una struttura di gruppo tramite una moltiplicazione commutativa opportunamente definita. Ció permetterá di giungere all'elegante risultato che asserisce che ogni terna primitiva si scrive in uno ed un solo modo come prodotto, rispetto a tale moltiplicazione, di terne aventi come diagonale un numero primo congruo ad 1 modulo 4. Nella terminologia di teoria dei gruppi, ció viene espresso dicendo che le terne primitive formano un gruppo abeliano libero generato dalle terne su menzionate.

Chiuderemo infine il nostro racconto ritornando al punto ed al posto da cui eravamo partiti, immaginando Pitagora nel suo giardino impegnato in alcune riflessioni sulla metempsicosi.

II. GLI ALBERI DELLE COPPIE DI PARAMETRI

La famosa tavoletta in caratteri cuneiformi denominata Plimpton 322, risalente all'inizio del XVIII secolo a.C. e proveniente dall'antica cittá di Larsa nella bassa Mesopotamia, presenta le misure del cateto piú lungo e dell'ipotenusa di 15 triangoli rettangoli relativi a terne pitagoriche. Alcune di queste terne sono costituite da numeri molto elevati, come ad esempio $(12.709, 13.500, 18.541)$. Molti studiosi sono convinti, anche se la cosa non é provata, che gli antichi Babilonesi conoscessero formule parametriche per determinare tali terne.

Le prime tracce nel mondo greco di formule che consentono di trovare infinite terne pitagoriche sono attribuite a Platone da Proclo, filosofo neoplatonico e matematico Bizantino vissuto nel V secolo d.C.. Platone, che visse dal 427 al 347 a.C., produsse le seguenti formule per ottenere delle terne pitagoriche :

$$a = 2x \quad , \quad b = x^2 - 1, \quad c = x^2 + 1.$$

Un calcolo immediato mostra che $a^2 + b^2 = c^2$. In questo modo peró non si ottengono tutte le terne e, se x é dispari, la terna ottenuta non é primitiva.

Vediamo come le formule attribuite a Platone vennero riprese e migliorate dopo alcuni decenni da Euclide e molti secoli dopo da Diofanto.

II.1. Le parametrizzazioni di Euclide e Diofanto

Nel Libro X degli "Elementi", apparsi nella prima metá del III secolo a.C., Euclide presenta nel Lemma 1 alla Proposizione XXIX un metodo che consente di creare terne pitagoriche e che dice testualmente cosí:

> *Si fissino due numeri AB e BC, e siano entrambi o pari o dispari. E poiché, sia che si sottragga un pari da un numero pari, sia un dispari da un dispari, il restante é pari, pertanto il restante AC é pari. Si tagli a metá AC in D. Siano AB e BC numeri quadrati [....]. Il prodotto di AB e BC sommato con il quadrato su CD é uguale al quadrato su BD. [....]. Risultano quindi trovati due numeri quadrati, il prodotto di AB e BC e il quadrato su CD, che composti formano il quadrato su BD.*

Preso un segmento AB di lunghezza p^2, e preso nel suo interno un punto C tale che la lunghezza di BC sia q^2, possiamo tradurre il Lemma 1 in formula cosí:

$$p^2 \cdot q^2 + (\frac{p^2 - q^2}{2})^2 = (\frac{p^2 - q^2}{2} + q^2)^2.$$

Un facile calcolo mostra l'uguaglianza dei due membri. Quindi questo metodo fornisce due numeri tali che la somma dei loro quadrati é un quadrato: i due numeri sono $\frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ e $p \cdot q$. L'ipotesi che p e q (con $p > q$) siano entrambi pari o entrambi dispari assicura che $p^2 - q^2$ sia un numero pari e quindi che $\frac{p^2-q^2}{2}$ sia un numero intero. Si é cosí ottenuta una terna pitagorica.

Se peró p e q sono entrambi pari, $\frac{p^2-q^2}{2}$ e $p \cdot q$ sono entrambi divisibili per 2, quindi la terna pitagorica che si ottiene non é primitiva. Se invece p e q sono entrambi dispari e primi tra di loro, si puó facilmente dimostrare quanto segue.

Proposizione 1. *Tutte e sole le terne pitagoriche primitive (a, b, c) con a pari e b dispari si ottengono da due numeri interi positivi $p > q$ dispari e primi tra di loro con le formule:*

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2} \quad , \quad b = pq \quad , \quad c = \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Le terne pitagoriche primitive cosí ottenute si chiameranno **terne dispari**, tenuto conto che il secondo cateto é dispari.

Abbiamo quindi coppie di parametri, che scriveremo in forma di vettore (p, q) e che possiamo rappresentare nel primo quadrante del piano cartesiano. Diremo che la coppia di parametri (p, q) *genera* la terna pitagorica primitiva $(\frac{p^2-q^2}{2}, pq, \frac{p^2+q^2}{2})$ e chiameremo le coppie di parametri soddisfacenti alle condizioni su ricordate di Euclide *coppie generatrici.* La prima di queste coppie é naturalmente $(3, 1)$, che genera la terna pitagorica primitiva $(4, 3, 5)$, che scambia tra di loro le prime due coordinate della terna "madre" $(3, 4, 5)$.

Diofanto di Alessandria, morto a 84 anni attorno al 290 d.C., nel Problema I del Libro VI del suo trattato "Arithmetica", riprese i parametri trovati da Euclide, peró facendo ipotesi diverse e modificando leggermente le formule. Anche in questo caso si puó dimostrare senza troppe difficoltá quanto segue.

Proposizione 2. *Tutte e sole le terne pitagoriche primitive* (a, b, c) *con* a *dispari e* b *pari si ottengono da due numeri interi positivi* $m > n$ *primi tra loro e di opposta paritá con le formule:*

$$a = m^2 - n^2 \ , \ b = 2mn \ , \ c = m^2 + n^2.$$

Le terne pitagoriche primitive cosí ottenute si chiameranno **terne pari**, tenuto conto che il secondo cateto é pari.

Anche in questo caso abbiamo coppie di parametri, che scriveremo in forma di vettore (m, n) e che rappresentiamo nel primo quadrante del piano cartesiano. Diremo ancora che la coppia di parametri (m, n) *genera* la terna pitagorica primitiva $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ e chiameremo anche in questo caso le coppie di parametri soddisfacenti alle condizioni di Diofanto *coppie generatrici.* La prima di queste coppie é in questo caso $(2, 1)$, che genera la terna "madre" $(3, 4, 5)$. Per questo motivo chiameremo la coppia di parametri $(2, 1)$ coppia "madre".

D'ora in avanti, per comoditá, riferendoci a terne pitagoriche primitive useremo l'acronimo TPP. In virtú delle due proposizioni precedenti, possiamo concludere che

tutte le TPP dispari si ottengono tramite la parametrizzazione di Euclide

e tutte le TPP pari si ottengono tramite la parametrizzazione di Diofanto.

Nel seguito useremo le seguenti notazioni:

- $\mathcal{CP}^-$: insieme delle coppie (p, q) di parametri di Euclide
- $\mathcal{CP}^+$: insieme delle coppie (m, n) di parametri di Diofanto
- $\mathcal{CP} = \{\mathcal{CP}^-, \ (1, 0) \ , \ \mathcal{CP}^+\}$
- $\mathcal{TP}^-$: insieme delle terne ottenute tramite i parametri di $\mathcal{CP}^-$, o terne dispari
- $\mathcal{TP}^+$: insieme delle terne ottenute tramite i parametri di $\mathcal{CP}^+$, o terne pari
- $\mathcal{TP} = \{\mathcal{TP}^-, \ (1, 0, 1) \ , \ \mathcal{TP}^+\}$.

Vediamo ora che tra alcuni di questi insiemi esistono delle biiezioni, secondo i diagrammi seguenti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CP}^- & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{CP}^+ \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathcal{TP}^- & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{TP}^+ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (p, q) & \xrightarrow{\alpha} & (\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}) = (m, n) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ (\frac{p^2-q^2}{2}, pq, \frac{p^2+q^2}{2}) & \longrightarrow & (pq, \frac{p^2-q^2}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \end{array}$$

Si noti che la mappa α ha come inversa la mappa $\alpha^{-1} : (m, n) \to (m+n, m-n) = (p, q)$ e che l'applicazione β produce nel primo quadrante del piano cartesiano una simmetria rispetto alla bisettrice, facendo corrispondere al punto $(\frac{p^2-q^2}{2}, pq)$ il punto $(pq, \frac{p^2-q^2}{2})$. Il fatto che le applicazioni Φ e Ψ siano delle biiezioni é conseguenza di quanto asserito rispettivamente nelle Proposizioni 1 e 2.

II.2. Gli alberi delle coppie generatrici di parametri

Presentiamo ora un metodo per generare tutte le coppie generatrici di parametri soddisfacenti alle condizioni di Diofanto e di Euclide a partire dalla coppia "madre" $(2, 1)$ e dalla coppia $(3, 1)$ tramite moltiplicazione per tre diverse matrici intere 2×2. Le coppie vengono viste come vettori colonna con due coordinate, che vanno quindi pre-moltiplicati per le tre matrici. Queste pre-moltiplicazioni producono per ciascuna coppia di parametri tre coppie "figlie"; moltiplicando queste tre coppie figlie sempre per le stesse tre matrici si ottenendo nove coppie "nipoti", e cosí via. Si ricavano in tal modo due alberi ternari generati dalle coppie $(2, 1)$ e $(3, 1)$. Alberi sostanzialmente uguali sono stati ottenuti da Saunders e Randall nel lavoro del 1994: *The Family Tree of the Pythagorean Triplets. Revisited* e da Price e Bernhart nel lavoro del 2007: *Pythagorean Triples and a New Pythagorean Theorem.*

Le tre matrici che producono tutte le coppie generatrici di parametri soddisfacenti alle condizioni di Diofanto e di Euclide a partire dalle coppie $(2, 1)$ e $(3, 1)$ sono:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{m} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiameremo $\underline{a}$ "matrice alta", $\underline{m}$ "matrice media" e $\underline{b}$ "matrice bassa". Il motivo di tali nomi sará chiarito nel prossimo paragrafo, quando vedremo che la pre-moltiplicazione di una coppia di parametri per una delle tre matrici produce una coppia che si situa in una zona alta, media oppure bassa, rispettivamente, della porzione del primo quadrante del piano cartesiano compresa tra le due semirette di equazione $y = x$ e $y = 0$.

Esaminiamo dapprima cosa accade per le coppie di parametri di Diofanto.

Proposizione 3. *Pre-moltiplicando una coppia generatrice (m, n), con $m > n$ primi tra di loro e di opposta paritá, per ciascuna delle matrici $\underline{a}, \underline{m}$ e $\underline{b}$ si ottiene ancora una coppia generatrice dello stesso tipo.*

Dimostrazione. Effettuiamo i tre prodotti:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-n \\ m \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+n \\ m \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2n \\ n \end{pmatrix}.$$

Risulta $2m - n > m$ perché $m - n > 0$, ed é evidente sia che $2m + n > m$, sia che $m + 2n > n$. Resta quindi da vedere che le tre nuove coppie sono formate da numeri primi tra di loro e di opposta paritá. Se d é un intero che divide $2m - n$ e m, allora d divide $2m - (2m - n) = n$, quindi, essendo m e n coprimi, $d = 1$ e pertanto anche $2m - n$ e m sono coprimi. Se poi m é pari, allora n é dispari e quindi anche $2m - n$ é dispari; se invece m é dispari, allora n é pari e quindi anche $2m - n$ é pari. Pertanto $2m - n$ e m sono di opposta paritá. Argomenti analoghi si applicano alle due coppie $\begin{pmatrix} 2m+n \\ m \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} m+2n \\ n \end{pmatrix}$ e permettono di concludere la dimostrazione. ///

La piú semplice delle coppie considerate nella Proposizione 3 é $(2, 1)$. Applicando ripetutamente a partire da questa coppia la moltiplicazione per le tre matrici $\underline{a}$, $\underline{m}$ e $\underline{b}$ si ricava l'albero desiderato. Ecco una visualizzazione del processo di generazione di questo albero nei suoi primi due passaggi.

In questo albero vanno messi in evidenza il ramo "alto", quello "medio" e quello "basso", ottenuti moltiplicando sempre rispettivamente per la matrice $\underline{a}$, oppure per la matrice $\underline{m}$, oppure per la matrice $\underline{b}$. Si evidenziano formule ricorsive, passando da una coppia (m_i, n_i) alla successiva (m_{i+1}, n_{i+1}), avendo posto naturalmente $m_0 = 2$ e $n_0 = 1$.

(i) Nel ramo alto, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$m_{i+1} = m_i + 1 \ , \ n_{i+1} = n_i + 1 = m_i;$$

si vede che i punti di questo ramo si avvicinano sempre piú alla retta di equazione $y = x$, restandone sempre al di sotto.

(ii) Nel ramo medio, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$m_{i+1} = 2m_i + m_{i-1} \ , \ n_{i+1} = 2n_i + n_{i-1} = m_i;$$

un rapido esame dei rapporti n_i/m_i (che danno la pendenza delle rette che congiungono l'origine con i punti di coordinate (m_i, n_i)) mostra che

$$\frac{2}{5} = \frac{n_0}{m_0} < \frac{5}{12} = \frac{n_1}{m_1} > \frac{12}{29} = \frac{n_2}{m_2} < \frac{29}{70} = \frac{n_3}{m_3} > \frac{70}{169} = \frac{n_4}{m_4} < \frac{169}{408} = \frac{n_5}{m_5} > \cdots .$$

Si vede quindi che tali rapporti alternativamente aumentano e diminuiscono, restando sempre compresi tra 1/2 e 1/3.

(iii) Nel ramo basso, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$m_{i+1} = m_i + 2 \ , \ n_i = 1;$$

si vede che i punti di questo ramo stanno tutti sulla retta di equazione $y = 1$ ed hanno per ascisse i numeri pari.

Vedremo ora che ogni coppia generatrice di parametri (m, n), con $m > n$ primi tra di loro e di opposta paritá, si ottiene dalla copia "madre" $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tramite una opportuna sequenza di pre-moltiplicazioni per le matrici $\underline{a}, \underline{m}$ e $\underline{b}$. Per fare ció, l'dea é quella di procede all'indietro, ovvero, data una coppia generatrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, applicare le operazioni inverse delle pre-moltiplicazioni per le tre matrici. Questo si effettua pre-moltiplicando per le matrici inverse, denotate con $\underline{a}^{-1}, \underline{m}^{-1}$ e $\underline{b}^{-1}$.

Il lettore puó facilmente verificare che le inverse delle tre matrici in considerazione sono le seguenti:

$$\underline{a}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{m}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si pone a questo punto il problema di scegliere quale matrice utilizzare per la pre-moltiplicazione di $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ tra $\underline{a}^{-1}, \underline{m}^{-1}$ e $\underline{b}^{-1}$ per fare il passo all'indietro. Il problema viene risolto dalla seguente proposizione, in cui va rilevato che fa eccezione la coppia "madre" $(2, 1)$.

Proposizione 4. *Per ogni coppia generatrice* $(m, n) \neq (2, 1)$*, con* $m > n$ *primi tra di loro e di opposta paritá, una sola tra le tre coppie*

$$\underline{a}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -m + 2n \end{pmatrix} \ , \ \underline{m}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m - 2n \end{pmatrix} \ , \ \underline{b}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - 2n \\ n \end{pmatrix}$$

é ancora una coppia generatrice dello stesso tipo.

Dimostrazione Guardando alla prima coppia, vale certamente che $n > -m + 2n$, perché ció equivale a $m > n$, vero per ipotesi. Non puó essere che $-m + 2n = 0$, perché $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se succede che $-m + 2n > 0$, allora $\underline{a}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ é una coppia generatrice dello stesso tipo, perché la coprimalitá e l'opposta paritá delle due coordinate si deduce con argomento analogo a quello usato in precedenza. Ma se $-m + 2n > 0$, allora $m - 2n < 0$, quindi $\underline{m}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ e $\underline{b}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ non sono coppie generatrici, avendo una coordinata negativa.

Se invece succede che $-m + 2n < 0$, col che $\underline{a}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ non é una coppia generatrice, risulta $m - 2n > 0$. Se allora $n > m - 2n$, $\underline{m}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ é coppia generatrice e non lo é $\underline{b}^{-1} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, ed il viceversa accade se $n < m - 2n$. Abbiamo visto quindi che una sola delle tre pre-moltiplicazioni produce ancora una coppia generatrice dello stesso tipo, come asserito. ///

Siamo ora in grado di vedere quanto prima anticipato, ovvero:

Teorema 5. *Ogni coppia generatrice di parametri* (m, n)*, con* $m > n$ *primi tra di loro e di opposta paritá, appartiene all'albero ternario creato a partire dalla coppia* $(2, 1)$ *tramite successive premoltiplicazioni per le tre matrici* $\underline{a}, \underline{m}$ *e* $\underline{b}$ *ripetute in modo opportuno un numero finito di volte.*

Dimostrazione Partiamo da una coppia generatrice $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pre-moltiplichiamola per l'unica matrice tra $\underline{a}^{-1}, \underline{m}^{-1}$ e $\underline{b}^{-1}$ che produce ancora una coppia generatrice. Se tale coppia coincide con $(2,1)$ abbiamo terminato, altrimenti a tale coppia applichiamo quanto appena fatto, procedendo in tal modo fino a che non si raggiunge la coppia "madre" $(2,1)$. Siamo sicuri che ció accada perché ad ogni pre-moltiplicazione la prima delle due coordinate della coppia diminuisce, passando da m a n oppure a $m-2n$, ed ogni successione decrescente di interi positivi é necessariamente finita. ///

Esaminiamo ora cosa accade per le coppie generatrici delle formule di Euclide, del tipo (p,q) con $p > q$ entrambi dispari e coprimi.

Proposizione 6. *Pre-moltiplicando una coppia generatrice (p,q), con $p > q$ entrambi dispari e coprimi, per ciascuna delle matrici $\underline{a}, \underline{m}$ e $\underline{b}$ si ottiene ancora una coppia generatrice dello stesso tipo.*

Dimostrazione. Effettuiamo i tre prodotti:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p-q \\ p \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+q \\ p \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2q \\ q \end{pmatrix}.$$

Risulta $2p-q > p$ perché $p-q > 0$, ed é evidente sia che $2p+q > p$, che $p+2q > q$. Resta quindi da vedere che le tre nuove coppie sono formate da numeri primi tra di loro ed entrambi dispari. Se d é un intero che divide $2p-q$ e p, allora d divide $2p-(2p-q) = q$, quindi, essendo p e q coprimi, $d = 1$ e pertanto anche $2p-q$ e p sono coprimi. Inoltre $2p-q$ é certamente dispari. Argomenti analoghi si applicano alle due coppie $\begin{pmatrix} 2p+q \\ p \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} p+2q \\ q \end{pmatrix}$ e ci permettono di concludere la dimostrazione. ///

Applicando ripetutamente a partire dalla coppia $(3,1)$ la moltiplicazione per le solite tre matrici si ottiene un secondo albero. Ecco una visualizzazione del processo di generazione di questo albero nei suoi primi due passaggi.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Anche in questo albero vanno messi in evidenza il ramo "alto", quello "medio" e quello "basso". Si evidenziano le seguenti formule ricorsive, passando da una coppia (p_i, q_i) alla successiva (p_{i+1}, q_{i+1}), avendo posto naturalmente $p_0 = 3$ e $q_0 = 1$:

(i) nel ramo alto, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$p_{i+1} = p_i + 2 \ , \ q_{i+1} = q_i + 2 = p_i;$$

si vede che i punti di questo ramo si avvicinano sempre piú alla retta di equazione $y = x$, restandone sempre al di sotto;

(ii) nel ramo medio, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\7\end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$p_{i+1} = 2p_i + p_{i-1} \ , \ q_{i+1} = 2q_i + q_{i-1} = p_i;$$

(iii) nel ramo basso, che inizia con le coppie $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$, risulta per ogni $i \geq 0$:

$$p_{i+1} = p_i + 2 \ , \ q_i = 1;$$

si vede che i punti di questo ramo stanno tutti sulla retta di equazione $y = 1$ ed hanno per ascisse i numeri dispari.

Anche per questo tipo di coppie, vediamo che ogni coppia generatrice di parametri (p, q), con $p > q$ primi tra di loro ed entrambi dispari, si ottiene dalla copia "padre" $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ tramite una opportuna sequenza di pre-moltiplicazioni per le matrici $\underline{a}, \underline{m}$ e $\underline{b}$. Procediamo come nel caso precedente, ovvero, applichiamo le pre-moltiplicazioni per le matrici $\underline{a}^{-1}, \underline{m}^{-1}$ e $\underline{b}^{-1}$.

Proposizione 7. *Per ogni coppia generatrice $(p, q) \neq (3, 1)$, con $p > q$ primi tra di loro ed entrambi dispari, una sola tra le tre coppie*

$$\underline{a}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q\\-p+2q\end{pmatrix} \ , \ \underline{m}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q\\p-2q\end{pmatrix} \ , \ \underline{b}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p-2q\\q\end{pmatrix}$$

é ancora una coppia generatrice dello stesso tipo.

Dimostrazione Guardando alla prima coppia, vale certamente che $q > -p + 2q$, perché ció equivale a $p > q$, vero per ipotesi. Non puó essere che $-p+2q = 0$, perché p é dispari. Se succede che $-p+2q > 0$, allora $\underline{a}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ é una coppia generatrice dello stesso tipo, perché la coprimalitá delle due coordinate si deduce con argomento analogo a quello usato in precedenza. Inoltre da $-p + 2q > 0$ segue che $p - 2q < 0$, quindi $\underline{m}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ e $\underline{b}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ non sono coppie generatrici, avendo una coordinata negativa.

Se invece succede che $-p+2q < 0$, col che $\underline{a}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ non é una coppia generatrice, risulta $p-2q > 0$. Se allora $q > p - 2q$, $\underline{m}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ é coppia generatrice e non lo é $\underline{b}^{-1}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, ed il viceversa accade se $q < p - 2q$. Abbiamo visto quindi che una sola delle tre pre-moltiplicazioni produce ancora una coppia generatrice dello stesso tipo, come asserito. ///

Possiamo ora provare per le coppie generatrici di Euclide un risultato analogo a quello provato per le coppie generatrici di Diofanto.

Teorema 8. *Ogni coppia generatrice di parametri (p,q), con $p > q$ primi tra di loro ed entrambi dispari, appartiene all'albero ternario creato a partire dalla coppia $(3,1)$ tramite successive moltiplicazioni per le tre matrici $\underline{a}, \underline{m}$ e $\underline{b}$ ripetute in modo opportuno un numero finito di volte.*

Dimostrazione Partiamo da una coppia generatrice $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $p > q$ primi tra di loro ed entrambi dispari. Pre-moltiplichiamola per l'unica matrice tra $\underline{a}^{-1}, \underline{m}^{-1}$ e $\underline{b}^{-1}$ che produce ancora una coppia generatrice dello stesso tipo. Se tale coppia coincide con $(3,1)$ abbiamo terminato, altrimenti a tale coppia applichiamo quanto appena fatto, procedendo in tal modo fino a che non si raggiunge la coppia "padre" $(3,1)$. Siamo sicuri che ció accada perché ad ogni pre-moltiplicazione la prima delle due coordinate della coppia diminuisce, passando da p a q oppure a $p-2q$, ed ogni successione decrescente di interi positivi é necessariamente finita. ///

II.3. Le zone alta, media e bassa degli alberi delle coppie di parametri

Consideriamo dapprima le coppie di parametri di Diofanto. Tutte le coppie generatrici (m,n), con $m > n$ coprimi e di opposta paritá, sono rappresentate nel primo quadrante del piano cartesiano da punti che stanno sotto alla semiretta di equazione $y = x$, perché $m > n$. La coppia "madre" $(2,1)$ sta sulla semiretta di equazione $y = \frac{1}{2}x$. Queste due semirette delimitano una zona del primo quadrante che chiameremo "zona alta" e che denoteremo con $\mathcal{ZA}$; pertanto

$$\mathcal{ZA} = \{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \mid 1 \geq \frac{n}{m} \geq \frac{1}{2}\}.$$

La zona del primo quadrante che sta tra la semiretta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ e quella di equazione di equazione $y = \frac{1}{3}x$ sará chiamata "zona media" e verrá denotata con $\mathcal{ZM}$; pertanto

$$\mathcal{ZM} = \{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \mid \frac{1}{2} \geq \frac{n}{m} \geq \frac{1}{3}\}.$$

Infine, la zona del primo quadrante che sta tra la semiretta di equazione $y = \frac{1}{3}x$ e l'asse dell x sará chiamata "zona bassa" e verrá denotata con $\mathcal{ZB}$; pertanto

$$\mathcal{ZB} = \{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \mid \frac{1}{3} \geq \frac{n}{m} > 0\}.$$

C'é naturalmente da domandarsi cosa ha a che fare questa ripartizione del primo quadrante con le coppie di parametri generatrici delle TPP secondo le formule di Diofanto, cioé le terne pari. La risposta viene dal fatto seguente.

Proposizione 9. *Pre-moltiplicando una coppia generatrice (m,n), con $m > n$ coprimi e di opposta paritá, per le matrici $\underline{a}, \underline{m}$ o $\underline{b}$ si hanno coppie generatrici che appartengono rispettivamente alle zone $\mathcal{ZA}, \mathcal{ZM}$ o $\mathcal{ZB}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che risulta

$$\underline{a} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-n \\ m \end{pmatrix} \ , \ \underline{m} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+n \\ m \end{pmatrix} \ , \ \underline{b} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2n \\ n \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi di provare le seguenti disuguaglianze:

$$1 \geq \frac{m}{2m-n} \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} \geq \frac{m}{2m+n} \geq \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{1}{3} \geq \frac{n}{m+2n} > 0.$$

Per quanto riguarda il primo caso, si osservi che $m > n$ implica $2m-n > m$, che implica $1 \geq \frac{m}{2m-n}$; inoltre risulta $\frac{m}{2m-n} \geq \frac{1}{2}$ se e solo se $2m \geq 2m - n$, il che vale sicuramente perché $n > 0$.

Per quanto riguarda il secondo caso, $\frac{1}{2} \geq \frac{m}{2m+n}$ equivale a $2m \leq 2m + n$, ovviamente vero, mentre $\frac{m}{2m+n} \geq \frac{1}{3}$ equivale a $3m \geq 2m + n$, pure ovviamente vero, sempre perché $m > n$.

Infine, per quanto riguarda il terzo caso, $\frac{1}{3} \geq \frac{n}{m+2n}$ equivale a $m + 2n \geq 3n$, vero sempre per il fatto che $m > n$. ///

Consideriamo ora le coppie generatrici di Euclide (p, q), con $p > q$ coprimi ed entrambi dispari. Anche tali coppie sono rappresentate nel primo quadrante del piano cartesiano da punti che stanno sotto alla semiretta di equazione $y = x$, perché $p > q$. La coppia $(3, 1)$ sta sulla semiretta di equazione $y = \frac{1}{3}x$. La dimostrazione del fatto che segue é del tutto simile a quella della Proposizione 9, per cui viene omessa.

Proposizione 10. *Pre-moltiplicando una coppia generatrice (p, q), con $p > q$ coprimi ed entrambi dispari, per le matrici $\underline{a}, \underline{m}$ o $\underline{b}$ si hanno coppie generatrici che appartengono rispettivamente alle zone $\mathcal{ZA}, \mathcal{ZM}$ o $\mathcal{ZB}$. ///*

III. GLI ALBERI DELLE TERNE PITAGORICHE PRIMITIVE

C'é un metodo completamente diverso da quello parametrico con il quale si ricavano tutte le TPP. Iniziato originariamente da Berggren nel 1934 in un lavoro in lingua svedese tradotto in inglese solo nel 2017, questo metodo venne ripreso e perfezionato da Barning nel 1963 nel lavoro in lingua olandese il cui titolo tradotto in inglese suona: *On Pythagorean and quasi-Pythagorean triangles and a generation process with the help of unimodular matrices.* Fu poi riscoperto indipendentemente da A. Hall nel lavoro in lingua inglese del 1970: *Genealogy of Pythagorean Triads.* Barning non cita il lavoro di Berggren e neppure Hall cita i lavori di Berggren e Barning. La non conoscenza dei lavori che li hanno preceduti forse dipende dalle lingue in cui sono stati pubblicati, svedese e olandese, meno fruibili dell'inglese.

III.1. La costruzione dei due alberi di TPP

Il metodo trovato da Barning consiste nel generare delle terne pitagoriche primitive a partire dalle terne "generatrici" $(3,4,5)$ e $(4,3,5)$, moltiplicandole per tre diverse matrici intere 3×3 e ripetendo all'infinito tali pre-moltiplicazioni. Le terne vengono viste come vettori colonna con tre coordinate, e vanno quindi pre-moltiplicate per le tre matrici. Una TPP pre-moltiplicata produce tre terne "figlie"; moltiplicando queste tre terne figlie sempre per le stesse tre matrici si ottenendo nove terne "nipoti", e cosí via.

Le tre matrici che producono questa genealogia di TPP sono:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Una visualizzazione di questo processo di generazione dell'albero nei suoi primi tre passaggi a partire dalla terna "generatrice" $(3,4,5)$ é presentata nella Figura 3.

(vedi la Figura 3 di pag.39)

Come si vede subito, tutte le terne ottenute sono terne pari. Un lettore armato di santa pazienza puó controllare che le terne presenti nella figura sono tutte TPP. Ció vale piú in generale, come stabilisce il fatto seguente.

Proposizione 11. *Pre-moltiplicando una TPP pari (rispettivamente, dispari) per le matrici A, M o B si ottengono ancora delle TPP pari (rispettivamente, dispari).*

Dimostrazione. Verifichiamo questo fatto per quanto riguarda la pre-moltiplicazione per la matrice A. Controlliamo innanzi tutto che la somma dei quadrati delle prime due coordinate coincida col quadrato della terza coordinata in una terna ottenuta cosí:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 2z \\ 2x - y + 2z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

$$(x - 2y + 2z)^2 + (2x - y + 2z)^2 =$$

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8yz + 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz =$$

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy + 12xz - 12yz =$$

$$(4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 8xy + 12xz - 12yz) + (x^2 + y^2 - z^2).$$

La quantitá nell'ultima parentesi é nulla, perché $x^2 + y^2 = z^2$, pertanto l'uguaglianza

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 8xy + 12xz - 12yz = (2x - 2y + 3z)^2$$

conclude la verifica del fatto che la nuova terna é una terna pitagorica. Resta da controllare che questa terna sia primitiva. Se allora l'intero positivo d divide $x - 2y + 2z, 2x - 2y + 2z$ e $2x - 2y + 3z$, allora d divide $(2x - 2y + 2z) - (x - 2y + 2z) = x$ e anche $(2x - 2y + 3z) - (2x - 2y + 2z) = z$, e sappiamo che ció comporta che d divide anche y. Pertanto, essendo (x, y, z) una TPP, risulta $d = 1$.

Lasciamo al lettore le analoghe verifiche che anche le pre-moltiplicazioni di una TPP per le matrici M e B producono ancora TPP, come pure il fatto che paritá e disparitá si conservano con le pre-moltiplicazioni. ///

A questo punto possiamo concludere che, a partire dalla terna $(3, 4, 5)$, si ottengono tramite pre-moltiplicazione altre 3 TPP, da queste con un secondo passaggio se ne ottengono altre $3^2 = 9$, da queste poi se ne ottengono con un terzo passaggio altre $3^3 = 27$, e cosí via; all'ennesimo passaggio si aggiungeranno altre 3^n TPP. Tutte queste TPP formano quindi quello che si chiama un albero "ternario". Una cosa analoga accade se partiamo, anziché dalla terna $(3, 4, 5)$, dall'altra terna "generatrice" (4.3.5), ottenendo un altro albero ternario. Chiameremo il primo **albero ternario pari** ed il secondo **albero ternario dispari**. Questi due alberi sono evidentemente disgiunti.

Volendo visualizzare meglio questi alberi, ci riduciamo a considerare di ogni TPP (x, y, z) solo le prime due coordinate (x, y), che forniscono le coordinate di un punto del primo quadrante del piano cartesiano. Osserviamo che la coordinata z é univocamente individuata da x e y, giacché $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Gli alberi ternari delle TPP appena considerati si riducono ad alberi ternari rappresentabile nel primo quadrante del piano cartesiano. Ecco come i primi due passaggi della generazione delle terne pari a partire dalla terna $(3, 4, 5)$ presentati nella Figura 3 vengono rappresentati con la riduzione dell'albero al primo quadrante del piano nella Figura 4.

(vedi la Figura 4)

Osserviamo che i due punti del piano cartesiano di coordinate $(3, 4)$ e $(4, 3)$ sono simmetrici rispetto alla diagonale che taglia a metá primo e terzo quadrante, cioé alla retta di equazione $y = x$. Questo fatto vale in generale per tutte le TPP.

Proposizione 12. *L'albero nel primo quadrante del piano cartesiano associato alle terne dispari é costituito da tutti e soli i punti del piano simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = x$ dei punti dell'albero associato alle terne pari.*

Il fatto che l'albero ternario pari e quello dispari siano tra di loro simmetrici rispetto alla diagonale del primo quadrante dipende dal fatto che si passa dalle terne pari a quelle dispari scambiando tra di loro le due coordinate. Il confronto tra la generazione dei due alberi tramite pre-moltiplicazione per la matrici A, M e B fa intervenite la "matrice di scambio"

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La pre-moltiplicazione di una matrice (o di un vettore) per P scambia le prime due righe delle matrice (o del vettore), mentre la post-moltiplicazione di una matrice per P scambia tra di loro le prime due colonne della matrice. Una semplice verifica permette inoltre di vedere che valgono le seguenti uguaglianze:

$$AP = PB \quad , \quad MP = PM \quad , \quad BP = AP.$$

Da ció si deduce che se una terna pari (x, y, z) si ottiene dalla "terna madre" $(3, 4, 5)$ tramite certe pre-moltiplicazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X_k X_{k-1} \cdots X_2 X_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dove per ogni indice i risulta $X_i \in \{A, M, B\}$, allora la sua simmetrica (y, x, z) si ottiene dalla terna $(4, 3, 5)$ tramite pre-moltiplicazioni nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = Y_k Y_{k-1} \cdots Y_2 Y_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dove per ogni $i \leq k$ si ha:

$$Y_i = B \text{ se } X_i = A \quad , \quad Y_i = M \text{ se } X_i = M \quad , \quad Y_i = A \text{ se } X_i = B.$$

Verifichiamolo su di un esempio: sia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = BMA \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; allora, utilizzando le uguaglianze $AP = PB, MP = PM$ e $BP = AP$, otteniamo:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = PBMA \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = APMA \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = AMPA \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = AMBP \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = AMB \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

III.2. Le regioni alta $\mathcal{A}$, media $\mathcal{M}$ e bassa $\mathcal{B}$ delle TPP

Abbiamo giá visto che ogni TPP (x, y, z) si puó rappresentare nel primo quadrante del piano cartesiano tramite le coordinate x e y, essendo z da esse individuato. Le due terne "generatrici" $(3, 4, 5)$ e $(4, 3, 5)$ si rappresentano con i punti di coordinate $(3, 4)$ e (4.3), cha stanno rispettivamente sulle rette per l'origine di equazioni $y = \frac{4}{3}x$ e $y = \frac{3}{4}x$, rispettivamente. Le corrispondenti semirette ripartiscono il primo quadrante nelle seguenti tre regioni, che per ovvie ragioni sono chiamate rispettivamente *regione alta, regione media* e *regione bassa*:

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \mid y \geq \frac{4}{3}x\} \quad , \quad \mathcal{M} = \{(x, y) \mid \frac{4}{3}x \geq y \geq \frac{3}{4}x\} \quad , \quad \mathcal{B} = \{(x, y) \mid \frac{3}{4}x \geq y\}.$$

Alle due semirette passanti per $(3, 4)$ e $(4, 3)$ appartengono i punti che rappresentano le terne pitagoriche multiple delle due "terne progenitrici". Ad esempio, sulla semiretta di equazione $y = \frac{4}{3}x$ sono rappresentate le terne $(6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20)$, etc.. D'altra parte a tali semirette non appartiene nessun punto che rappresenti TPP diverse dalle due "terne progenitrici", perché se (a, b, c) é una TPP con (a, b) che sta sulla retta $y = \frac{4}{3}x$, allora $b = \frac{4}{3}a$, ed essendo a e b coprimi, segue che $a = 3$ e $b = 4$. Analogamente se $y = \frac{3}{4}x$. Pertanto, tutte le TPP diverse da $(3, 4, 5)$ e $(4, 3, 5)$ sono interne ad una delle tre regioni $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{B}$.

(vedi la Figura 5)

Possiamo a questo punto vedere un primo fatto interessante. Per semplificare l'esposizione, diremo che una TPP appartiene alla regionie $\mathcal{A}$, o alla regione $\mathcal{M}$, oppure alla regione $\mathcal{B}$, se il punto rappresentato dalle sue due prime coordinate vi appartiene.

Proposizione 13. *Pre-moltiplicando una TPP per le matrici A, M o B si ottengono TPP che appartengono rispettivamente alle regioni $\mathcal{A}, \mathcal{M}$ o $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Verifichiamo questo fatto per quanto riguarda la pre-moltiplicazione per la matrice A e lasciamo al lettore le analoghe verifiche riguardanti le matrici M e B. Sia allora (x, y, z) una TPP. Risulta:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 2z \\ 2x - 2y + 2z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

Si tratta di verificare che $y'/x' = (2x - 2y + 2z)/(x - 2y + 2z) > 4/3$ il che equivale a verificare che $6x - 6y + 6z > 4x - 8y + 8z$. Ma l'ultima disuguaglianza equivale a $2x + 2y - 2z > 0$, che é evidentemente soddisfatta, perché $x + y > z$, essendo un lato di un triangolo di lunghezza sempre inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due lati. ///

Il fatto che una terna primitiva che si ottiene da una terna pre-moltiplicata per la matrice A appartenga alla regione alta non dipende dalla regione cui la matrice che viene pre-moltiplicata appartiene, e analogamente per terne primitive ottenute tramite pre-moltiplicazione per M o per B.

C'é uno stretto legame tra zone alta, media e bassa delle coppie generatrici di parametri e regioni alta, media e bassa delle TPP. Pensando la funzione parametrizzatrice $\Psi : \mathcal{CP}^+ \to \mathcal{TP}^+$ come assumente valori non nelle TPP, ma nelle coppie formate dalle prime due coordinate dell terne, ovvero:

$$\Psi(m, n) = (m^2 - n^2, 2mn)$$

valgono le seguenti uguaglianze (vedi la Figura 6):

$$\Psi(\mathcal{ZA}) = \mathcal{A} \quad , \quad \Psi(\mathcal{ZM}) = \mathcal{M} \quad , \quad \Psi(\mathcal{ZB}) = \mathcal{B}$$

E' infatti facile verificare che risulta

$$\frac{n}{m} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2mn}{m^2 - n^2} \geq \frac{4}{3} \quad ; \quad \frac{1}{2} \geq \frac{n}{m} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{2mn}{m^2 - n^2} \geq \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{1}{3} \geq \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{2mn}{m^2 - n^2} .$$

III.3. Ogni TPP appartiene ad uno dei due alberi

E' naturale chiedersi se con il metodo matriciale sopra descritto si ricavano tutte le TPP. Proveremo ora che i due alberi ottenuti comprendono tutte le possibili TTP.

Proposizione 14. *Ogni TPP si ottiene pre-moltiplicando ripetutamente in modo opportuno per le matrici A, M, B una delle due terne progenitrici $(3, 4, 5)$ o $(4, 3, 5)$, ovvero, ogni TPP appartiene ad uno dei due alberi da esse generati.*

Dimostrazione Sia (x, y, z) una TPP. Come nel caso delle coppie di parametri generatori, l'idea della dimostrazione consiste nel cercare un percorso all'indietro, univocamente individuato dalla TPP, che partendo da (x, y, z) conduca ad una delle due terne progenitrici. Volendo percorrere un cammino all'indietro, bisogneró pre-moltiplicare ripetutamente in modo opportuno le TPP ottenute tramite pre-moltiplicazione per le terne A, M e B per delle matrici che facciano percorrere all'incontrario questi passi. Tali matrici sono le matrici inverse di A, M e B, denotate con A^{-1}, M^{-1}, B^{-1}.

Il lettore potrá facilmente verificare che le inverse delle tre matici in considerazione sono le seguenti, effettuando le moltiplicazioni richieste e trovando sempre come risultato la matrice identica 3×3:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

E' evidente, come accade con la pre-moltiplicazione per A, M, B, che anche la pre-moltiplicazione per le loro inverse conserva paritá e disparitá delle terne. Procediamo allora in due passi.

1^o **Passo.** *Se (x, y, z) é una TPP diversa da $(3,4,5)$ e $(4,3,5)$, pre-moltiplicandola per le tre matrici A^{-1}, M^{-1}, B^{-1} si ottengono terne del tipo (x', y', z') tali che:*
(i) $x' < x$ e $y' < y$, con x' e y' numeri interi non nulli
(ii) $z' > 0$
(iii) $x'^2 + y'^2 = z'^2$
(iv) $MCD(x', y', z') = 1$.

Questo passo della dimostrazione mostra quindi che si ottengono terne in tutto simili alle TPP, tranne per il fatto che i due coefficienti x' e y' possono essere negativi, risultando comunque minori di x e y. Analizziamo prima la pre-moltiplicazione per M^{-1}. Risulta:

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 2x + y - 2z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

e dal fatto che $\text{MCD}(x, y, z) = 1$ segue facilmante che $\text{MCD}(x', y', z') = 1$ (quindi il punto (iv) é provato). Si ha inoltre:

$$x' = x + 2y - 2z < x \Leftrightarrow y < z$$

$$y' = 2x + y - 2z < y \Leftrightarrow x < z.$$

Poiché si ha per ipotesi che $y < z$ e $x < z$, si é provato che $x' < x$ e $y' < y$. E' poi evidente che x', y' sono numeri interi; vediamo perché risultano non nulli:

$$x' = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 2z \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 + 4xy = 4x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 3x = 4y$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 2z \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 4xy = 4x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow 3y = 4x.$$

Le ultime due uguaglianze sarebbero verificate solo se (x, y, z) fosse una delle due terne progenitrici $(3,4,5)$ 0 $(4,3,5)$, e, siccome ció non accade, abbiamo verificato completamente il punto (i). Proviamo ora il punto (ii).

$$z' = -2x - 2y + 3z > 0 \Leftrightarrow 3z > 2(x + y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2 + y^2) > 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 8xy > 0;$$

l'ultima disuguaglianza é sempre valida perché

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy > 5x^2 + 5y^2 - 10xy = (\sqrt{5}x - \sqrt{5}y)^2 \geq 0$$

quindi anche il punto (ii) é provato.

Calcoliamo infine $x'^2 + y'^2$. Risulta:

$$x'^2 + y'^2 = (x + 2y - 2z)^2 + (2x + y - 2z)^2 =$$

$$= (x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy4xz8yz) + (4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz) =$$

$$= 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 12xz - 12yz =$$

$$= 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 8xy - 12xz - 12yz = (-2x - 2y + 3z)^2 = z'^2.$$

Le analoghe conseguenze delle pre-moltiplicazioni per A^{-1} e B^{-1} si ricavano con considerazioni del tutto analoghe, oppure in modo semplice deducendole da quanto appena visto, tenuto conto che $A^{-1} = D_2 M^{-1}$ e $B^{-1} = D_1 M^{-1}$, dove

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore le verifiche di questi due casi.

2^o **Passo.** *Se* (x, y, z) *é una TPP diversa da* $(3, 4, 5)$ *e* $(4, 3, 5)$*, pre-moltiplicandola rispettivamente per* A^{-1}, M^{-1}, B^{-1} *si ottiene ancora una TPP (ovvero,* $x' > 0$ *e* $y' > 0$*) se e solo se* (x, y, z) *appartiene rispettivamente alla regione alta* $\mathcal{A}$*, alla regione media* $\mathcal{M}$ *o alla regione bassa* $\mathcal{B}$*.*

Consideriamo dapprima

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Usando le notazioni e quanto visto nel 1^o Passo, risulta:

$$x' = x + 2y - 2z > 0 \Leftrightarrow x + 2y > 2z \Leftrightarrow x2 + 4y2 + 4xy > 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 4y > 3x \Leftrightarrow \frac{y}{x} > \frac{3}{4}$$

$$y' = 2x + y - 2z > 0 \Leftrightarrow 2x + y > 2z \Leftrightarrow 4x2 + y2 + 4xy > 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 4x > 3y \Leftrightarrow \frac{y}{x} < \frac{4}{3}$$

quindi, tenuto conto di quanto giá visto nel 1^o Passo, (x', y', z') é una TPP se e solo se (x, y, z) sta nella regione $\mathcal{M}$.

Analogamente, se consideriamo

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ricaviamo, sempre tenuto conto di quanto visto nel 1^o Passo:

$$x' = x + 2y - 2z > 0 \Leftrightarrow x + 2y > 2z \Leftrightarrow x2 + 4y2 + 4xy > 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 4y > 3x \Leftrightarrow \frac{y}{x} > \frac{3}{4}$$

$$y' = -2x - y + 2z > 0 \Leftrightarrow 2x + y < 2z \Leftrightarrow 4x2 + y2 + 4xy < 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 3y > 4x \Leftrightarrow \frac{y}{x} > \frac{4}{3}$$

quindi (x', y', z') é una TPP se e solo se (x, y, z) sta nella regione $\mathcal{A}$.

Infine, consideriamo

$$B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

e ricaviamo

$$x' = -x - 2y + 2z > 0 \Leftrightarrow x + 2y < 2z \Leftrightarrow x2 + 4y2 + 4xy < 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 4y < 3x \Leftrightarrow \frac{y}{x} < \frac{3}{4}$$

$$y' = 2x + y - 2z > 0 \Leftrightarrow 2x + y > 2z \Leftrightarrow 4x2 + y2 + 4xy > 4x2 + 4y2 \Leftrightarrow 3y < 4x \Leftrightarrow \frac{y}{x} < \frac{4}{3}$$

quindi (x', y', z') é una TPP se e solo se (x, y, z) sta nella regione $\mathcal{B}$.

L'ipotesi che (x, y, z) sia diversa da $(3, 4, 5)$ e da $(4, 3, 5)$ assicura che $\frac{y}{x} \neq \frac{3}{4}$ e $\frac{y}{x} \neq \frac{4}{3}$, essndo la frazione $\frac{y}{x}$ ridotta ai minimi termini.

I due passi provati sopra ci permettono di concludere facilmente la dimostrazione. Partiamo dalla TPP (x, y, z), supponendo che essa non sia una delle due terne progenitrici. A seconda che essa appartenga alla regione alta $\mathcal{A}$, oppure alla regione media $\mathcal{M}$, oppure alla regione bassa $\mathcal{B}$, la pre-moltiplichiamo per A^{-1}, oppure per M^{-1}, oppure per B^{-1}. I due passi provati ci assicurano che

troviamo ancora una TTP, che ha i primi due coefficienti positivi e piú piccoli di quelli di partenza. Se moltiplichiamo invece la TPP per una matrice tra A^{-1}, M^{-1}, B^{-1} non corrispondente alla regione cui appartiene (x, y, z), non otteniamo una TPP, perché almeno uno tra i primi due coefficienti della nuova terna non risulta positivo. Pertanto il modo di procedere all'indietro é univocamnete individuato dalla regione in cui la TPP si trova.

Se la nuova TPP coincide con una delle due terne progenitrici abbiamo finito il nostro percorso all'indietro, altrimenti ripetiamo la procedura. Questo procedimento deve forzatamente terminare dopo un numero finito di passi, facendoci pervenire ad una delle due terne progenitrici, perché una successione strettamente decrescente di numeri interi positivi é necessariamente finita. ///

Concludiamo questo esame del percorso all'indietro da una TPP diversa dalle terne "progenitrici" tramite pre-moltiplicazione per le matrici inverse di A, M e B evidenziando quanto stabilito nel 2^o Passo della dimostrazione precedente con la seguente

Proposizione 15. *Data una TPP (x, y, z) diversa da $(3, 4, 5)$ e $(4, 3, 5)$, se ne considerino le pre-moltiplicazioni per le matrici A^{-1}, M^{-1}, B^{-1}. Vale quanto segue:*
- se $(x, y, z) \in \mathcal{A}$, allora solo la pre-moltiplicazione per A^{-1} produce una TPP
- se $(x, y, z) \in \mathcal{M}$, allora solo la pre-moltiplicazione per M^{-1} produce una TPP
- se $(x, y, z) \in \mathcal{B}$, allora solo la pre-moltiplicazione per B^{-1} produce una TPP.

ESEMPIO

Prendiamo la TPP $(55, 48, 73)$. Poiché $4/3 > 48/55 > 3/4$, questa TPP appartiene alla regione media $\mathcal{M}$. La Proposizione precedente assicura allora che tra le pre-moltiplicazioni per A^{-1}, M^{-1}, B^{-1}, solo quella per M^{-1} produce ancora una TPP. Effettuiamo tale pre-moltiplicazione:

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ 48 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo la stessa procedura per la TPP $(5, 12, 13)$. Poiché $12/5 > 4/3$, questa TPP appartiene alla regione alta $\mathcal{A}$ e la pre-moltiplicazione per la matrice A^{-1} porge:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Pertanto risulta:

$$A^{-1} \cdot M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ 48 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 48 \\ 73 \end{pmatrix}. \quad ///$$

Dal fatto che ogni terna pari appartenga all'albero ternario generato dalla terna $(3, 4, 5)$ discende la possibilitá di associare ad ogni terna pari (x, y, z) una sua "espansione" in sistema numerico ternario:

se $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X_k X_{k-1} \cdots X_2 X_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, con $X_i \in \{A, M, B\}$ per ogni $i \leq k$, associamo a (x, y, z) l'espansione in numerazione ternaria

$$d_k d_{k-1} \cdots d_2 d_1 +$$

dove $d_i = 1$ se $X_i = B$, $d_i = 2$ se $X_i = M$, $d_i = 3$ se $X_i = A$.

Ad esempio, poiché la terna $(187, 81, 205)$ si ottiene dalla terna $(3, 4, 5)$ cosí:

$$\begin{pmatrix}187\\84\\205\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}55\\48\\73\end{pmatrix} = BM\begin{pmatrix}5\\12\\13\end{pmatrix} = BMA\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

si ha la seguente espansione ternaria di $(187, 81, 205)$: $123+$. E' evidente che le terne pari del ramo basso hanno espansioni del tipo $111\cdots 11+$, quelle del ramo medio $222\cdots 22*$ e qualle del ramo alto $333\cdots 33+$.

Nel caso di terne dispari si ha una analoga espansione che si fa terminare peró con il segno "-".

In questo modo so é definito un buon ordinamento di tutte le TPP pari ed un buon ordinamento per quelle dispari.

III.4. Rami notevoli dell'albero delle TPP

Cerchiamo di muoverci nell'albero delle terne pari generato dalla terna $(3, 4, 5)$, alla ricerca di rami particolarmente significativi. Balzano subito all'occhio tre rami:

- il ramo che si ottiene a partire da $(3, 4, 5)$ moltiplicando le TPP sempre per la matrice alta A, che chiameremo "ramo alto"
- il ramo che si ottiene a partire da $(3, 4, 5)$ moltiplicando le TPP sempre per la matrice alta M, che chiameremo "ramo medio"
- il ramo che si ottiene a partire da $(3, 4, 5)$ moltiplicando le TPP sempre per la matrice alta B, che chiameremo "ramo basso".

Esaminiamoli uno alla volta. Troveremo che per le TPP del ramo alto e del ramo basso si ricavano formule ricorsive per le coordinate delle terne, cioé esistono delle formule che permettono di ricavare x_n, y_n e z_n dalle coordinate delle terna precedente; sapendo che $x_0 = 3, y_0 = 4$ e $z_0 = 5$, si possono ricavano facilmente tutte le terne successive. Ció non appare affatto evidente per le terne del ramo medio.

IL RAMO ALTO

Denotando con una freccia orizzontale la pre-moltiplicazione per la matrice A, le prime sette terne del ramo alto sono

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5\\12\\13\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}7\\24\\25\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}9\\40\\41\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}11\\60\\61\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}13\\84\\85\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}15\\112\\113\end{pmatrix} \to .....$$

Per ogni intero $n \geq 1$ poniamo

$$A^n\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$

e sia $x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = 5$. E' immediato allora verificare che le coordinate delle TPP soddisfano a queste relazioni, per ogni $n \geq 0$, che costituiscono le formule ricorsive annunciate:

$$x_{n+1} = x_n + 2 \quad , \quad y_{n+1} = y_n + 4(n+2) \quad , \quad z_{n+1} = y_{n+1} + 1.$$

Possiamo dedurre da queste relazioni i fatti seguenti:

- esistono infinite TPP (x, y, z) generate da $(3, 4, 5)$ in cui $z = y + 1$, ovvero, esistono infiniti triangoli pitagorici in cui la differenza tra le misure di diagonale e cateto piú lungo é pari ad 1

- esistono infinite TPP (x, y, z) generate da $(3, 4, 5)$ in cui il rapporto y/x tende all'infinito, ovvero, esistono infiniti triangoli pitagorici in cui il rapporto delle misure dei due cateti tende all'infinito.

IL RAMO MEDIO

Denotando con una freccia orizzontale la pre-moltiplicazione per la matrice M, le prime sette terne del ramo medio sono

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}21\\20\\29\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}119\\120\\167\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}693\\692\\979\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4035\\4036\\5707\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}23521\\23520\\33263\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}137087\\137088\\193871\end{pmatrix} \to .....$$

La prima cosa che balza all'occhio guardando queste terne é la loro veloce crescita, a confronto con le analoghe terne del ramo alto e del ramo basso. Ció dipende naturalmente dal fatto che la matrice M ha tutti i suoi coefficienti positivi, mentre nelle matrici A e B ci sono coefficienti negativi che "frenano" la crescita dei numeri.

Posto, per ogni intero $n \geq 1$:

$$M^n \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$

valgono le seguenti formule ricorsive:

- $y_n = x_n + 1$ per n pari, $y_n = x_n - 1$ per n dispari, ovvero, si hanno triangoli pitagorici in cui i due cateti differiscono di una unitá e si alternano ad ogni passo nell'essere uno maggiore dell'altro.

Si potrebbe dire che le terne del ramo medio si attorcigliano attorno alla semiretta di equazione $y = x$, non sovrapponendosi mai ad essa.

IL RAMO BASSO

Denotando con una freccia orizzontale la pre-moltiplicazione per la matrice B, le prime sette terne del ramo basso sono

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}15\\8\\17\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}35\\12\\37\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}63\\16\\65\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}99\\20\\101\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}143\\24\\145\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}195\\28\\197\end{pmatrix} \to .....$$

Posto, per ogni intero $n \geq 1$:

$$B^n \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$

valgono le seguenti relazioni per ogni $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n + 4(2n+3) \quad , \quad y_{n+1} = y_n + 4 \quad , \quad z_{n+1} = x_{n+1} + 2.$$

Possiamo dedurre da queste relazioni i fatti seguenti:

- esistono infinite TPP (x, y, z) generate da $(3, 4, 5)$ in cui $z = x + 2$, ovvero, esistono infiniti triangoli pitagorici in cui la differenza tra le misure di diagonale e cateto piú lungo é pari a 2

- esistono infinite TPP (x, y, z) generate da $(3, 4, 5)$ in cui il rapporto x/y tende all'infinito, ovvero, esistono infiniti triangoli pitagorici in cui il rapporto tra le misure del cateto maggiore e del cateto minore tende all'infinito.

IV. LE SCOPERTE DEGLI ALBERI E LA LORO CRESCITA CONFORME

Sembrerebbe plausibile che tra i due alberi ternari che abbiamo esaminato, ovvero, quello delle coppie generatrici di parametri secondo Diofanto e quello costituito dalle TPP generate dalla terna "madre" $(3,4,5)$, il primo sia stato trovato per primo, sia perché formato da coppie anziché da terne, ma soprattutto perché le tre matrici 2×2 $\underline{a},\underline{m}$ e $\underline{b}$ che producono l'albero a partire dalla coppia "madre" $(2,1)$ sono piú semplici delle matrici 3×3 A,M e B che producono l'albero delle TPP.

E' vero invece il contrario, giacché la scoperta dell'albero delle TPP é avvenuta nel 1963 ad opera di Barning, mentre quella dell'albero delle coppie generatrici di parametri é avvenuta decenni piú tardi ed in forme diverse, come ad esempio nel lavoro di Saunders e Randall del 1994, e poi in quello di Price e Bernhart del 2007, dove le coppie di parametri vengono sostituite da frazioni. Ció desta una certa curiositá e induce a porsi queste due domande: é possibile che la scoperta dell'albero delle coppie generatrici di parametri, essendo avvenuta dopo, sia stata dedotta dall'albero scoperto da Barning? E come avvenne la scoperta di Barning?

IV.1. Le scoperte dei due alberi

Cominciamo col rispondere positivamente alla prima domanda. Vediamo infatti come, limitandoci alla coppia di matrici $\underline{m}$ e M, la matrice $\underline{m}$ si possa ricavare una volta nota la matrice M.

La corrispondenza biunivoca tra coppie generatrici di parametri secondo Diofanto e TPP pari funziona cosí:

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m^2-n^2 \\ 2mn \\ m^2+n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z+x}{2}} \\ \sqrt{\frac{z-x}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

$$M\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2z \\ 2x+y+2z \\ 2x+2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{z'+x'}{2}} \\ \sqrt{\frac{z'-x'}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}.$$

Sostituendo a z' e x' i loro valori in funzione di x,y e z troviamo:

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3x+4y+5z}{2}} \\ \sqrt{\frac{z+x}{2}} = m \end{pmatrix}.$$

A questo punto si tratta di trovare due numeri interi a e b tali che

$$\sqrt{\frac{3x+4y+5z}{2}} = am+bn.$$

Poiché $\sqrt{\frac{z+x}{2}} = m$ e $\sqrt{\frac{z-x}{2}} = n$, elevando al quadrato e semplificando, tenuto conto che

$$\sqrt{(z+x)(z-x)} = \sqrt{z^2-x^2} = \sqrt{y^2} = y$$

si arriva all'uguaglianza

$$(3-a^2+b^2)x+(4-2ab)y+(5-a^2-b^2)z = 0.$$

Azzerare i tre coefficienti in parentesi equivale a trovare a e b soddisfacenti a:

$$a^2-b^2=3 \quad , \quad 2ab=4 \quad , \quad a^2+b^2=5$$

uguaglianze che sappiamo valere per $a = 2$ e $b = 1$. Pertanto vale l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{3x + 4y + 5z}{2}} = 2m + n.$$

Abbiamo trovato che il passaggio dalla coppia $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ alla coppia $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$ si effettua nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m + n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice cercata é $\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Con conti simili si puó vedere come le matrici $\underline{a}$ e $\underline{b}$ si possano ricavare una volta note, rispettivamente, le matrici A e B.

Cerchiamo ora di rispondere alla seconda domanda: come avvenne la scoperta di Barning? Abbiamo giá ricordato che nel lavoro di Barning (in lingua olandese) non é citato il lavoro del 1934 di Berggren (in lingua svedese), che costituisce la premessa al lavoro di Barning; dobbiamo quindi dedurre che Barning non conosceva il lavoro di Berggren.

Berggren si era posto la domanda: é possibile, data una TPP (x, y, z), ottenerne un'altra (x', y', z') aggiungendo uno stesso numero intero positivo a tutte e tre le coordinate della prima terna? Quindi la terna cercata era del tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t \\ y + t \\ z + t \end{pmatrix}.$$

Queste tre nuove coordinate dovevano necessariamente soddisfare all'uguaglianza

$$(x + t)^2 + (y + t)^2 = (z + t)^2 \Leftrightarrow x^2 + t^2 + 2xt + y^2 + t^2 + 2yt = z^2 + t^2 + 2zt \Leftrightarrow t^2 + 2t(x + y - z) = 0.$$

Supposto naturalmente $t \neq 0$, l'uguaglianza iniziale diventa equivalente alla seguente:

$$t = 2(-x - y + z).$$

Pertanto la terna cercata da Berggren é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y + 2z \\ -2x - y + 2z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sorgeva peró a questo punto il problema che, mentre $z' = -2x - 2y + 3z$ é certamente positivo, $x' = -x - 2y + 2z$ e $y' = -2x - y + 2z$ non possono entrambi positivi; vediamo perché.
Controlliamo prima che $z' > 0$:

$$z' = -2x - 2y + 3z > 0 \Leftrightarrow 3z > 2x + 2y \Leftrightarrow 9z^2 > 4x^2 + 4y^2 + 8xy.$$

Sostituendo $x^2 + y^2$ a z^2, si ricava la disuguaglianza equivalente a $z' > 0$:

$$9x^2 + 9y^2 > 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 8xy > 0.$$

Ora l'ultima disuguaglianza é sicuramente vera, perché

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy > 5x^2 + 5y^2 - 10xy = (\sqrt{5}x + \sqrt{5}y)^2 > 0;$$

pertanto risulta sicuramente $z' > 0$.

Controlliamo ora che i segni di x' e y' sono discordi:

$$x' = -x - 2y + 2z > 0 \Leftrightarrow 2z > x + 2y \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 > x^2 + 4y^2 + 4xy \Leftrightarrow 3x^2 > 4xy \Leftrightarrow 3x > 4y$$

e analogamente $y' > 0 \Leftrightarrow 3y > 4x$. Ora le due disuguaglianze $3x > 4y$ e $3y > 4x$ non possono valere contemporaneamente, altrimenti $9x > 12y = 4 \cdot 3y > 4 \cdot 4x = 16x$, il che é assurdo.

Berggren, per venire fuori da questo inghippo, ha considerato terne pitagoriche in cui le prime due coordinate possono assumere anche valori negativi.

In modo del tutto diverso Barning arriva alle sue matrici partendo dalla ricerca di matrici intere che tengono invariata la forma quadratica $x^2 + y^2 - z^2$. Ora risulta:

$$x^2 + y^2 - z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \text{dove} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dalla teoria delle forma quadratiche sappiamo che ció equivale a trovare matrici intere X tali che

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} X^T J X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per ogni terna (x, y, z), equivalentemente:

$$X^T J X = J.$$

Le tre matrici M, A e B soddisfano a questa uguaglianza, come é immediato verificare, ma anche la matrice trovata da Bergrren con le prime due colonne negative andrebbe bene. Viene quindi da pensare che Barning, volendo restare con terne a coordinate tutte positive, abbia scartato la matrice trovata da Berggren. Barning trovó che chiedendo che la nuova TPP (x', y', z') soddisfacesse all'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + t \\ -y + t \\ z + t \end{pmatrix}$$

si restava con TPP positive. Infatti in questo caso risulta:

$$(-x+t)^2 + (-y+t)^2 = (z+t)^2 \Leftrightarrow x^2 + t^2 - 2xt + y^2 + t^2 - 2ty = z^2 + t^2 + 2zt \Leftrightarrow t^2 + 2t(-x - y - z) = 0$$

e l'ultima uguaglianza equivale a

$$t = 2(x + y + z).$$

Pertanto in questo caso la terna che si ottiene é:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 2z \\ 2x + y + 2z \\ 2x + 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ecco spuntare la matrice M che trasforma la terna (x, y, z) nella terna $(x', y,' z')$.

Barning provó poi a dare segno negativo a una sola tra le coordinate x e y, quindi a trasformare (x, y, z) rispettivamente in:

$$\begin{pmatrix} -x + t \\ y + t \\ z + t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x + t \\ -y + t \\ z + t \end{pmatrix}.$$

Argomentando nello stesso modo usato per ottenere la matrice M, ricavó le matrici A e B. Si noti che nel primo caso si ricava $t = 2(x - y + z)$ e nel secondo caso $t = 2(-x + y + z)$; in entrambi i casi risulta $-x + t > 0$ e $-y + t > 0$, rispettivamente, come é immediato verificare.

Ma il contributo di Barning non si ferma all'avere individuato le tre matrici M, A e B che consentono di mantenere le TPP nel primo quadrante. L'altra cosa estremamente importante che Barning dimostró é che ogni TPP appartiene ad uno dei due alberi ternari che aveva ottenuto con le tre matrici a partire dalle terne "progenitrici" $(3, 4, 5)$ e $(4, 3, 5)$, usando il classico argomento "in discesa" che viene usato in molte questioni che coinvolgono i numeri naturali.

IV.2. L'albero dei parametri e l'albero delle TPP hanno crescite conformi

Abbiamo denotato con $\mathcal{CP}^+$ l'albero delle coppie di parametri (m, n) secondo Diofanto generato dalla coppia $(2, 1)$, con $m > n$ coprimi e di opposta paritá, e con $\mathcal{TP}^+$ l'albero delle terne pari generato dalla terna "madre" $(3, 4, 5)$. Abbiamo inoltre denotato con $\Psi : \mathcal{CP}^+ \to \mathcal{TP}^+$ il passaggio da una coppia di parametri alla TPP corrispondente, definito da:

$$\Psi(m, n) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2).$$

Il passaggio da una coppia di parametri (m, n) alle tre coppie successive avviene tramite pre-moltiplicazione per le tre matrici $\underline{a}, \underline{m}, \underline{b}$, mentre il passaggio da una TPP alle tre terne successive avviene tramite pre-moltiplicazione per le tre matrici A, M, B. Sono queste moltiplicazioni che producono la struttura ad albero ternario degli insiemi $\mathcal{CP}^+$ e $\mathcal{TP}^+$.

Poniamoci allora la seguente domanda: date una coppia di parametri (m, n) e la corrispondente terna $\Psi(m, n) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, a quali terne corrispondono le tre "figlie" della coppia (m, n)?

La risposta é quella che uno si aspetta: le tre terne corrispondenti sono ordinatamente le "figlie" della terna $\Psi(m, n)$, nel senso che alla "figlia" di (m, n) nella zona alta corrisponde la "figlia" di $\Psi(m, n)$ nella regione alta, e analogamente per le "figlie" in zona media ed in zona bassa. Per dimoatrare ció, basta verificare che sono commutativi i tre seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{CP}^+ & \xrightarrow{\underline{a}} & \mathcal{CP}^+ \\ \Psi\downarrow & & \downarrow\Psi \\ \mathcal{TP}^+ & \xrightarrow{A} & \mathcal{TP}^+ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{CP}^+ & \xrightarrow{\underline{m}} & \mathcal{CP}^+ \\ \Psi\downarrow & & \downarrow\Psi \\ \mathcal{TP}^+ & \xrightarrow{M} & \mathcal{TP}^+ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{CP}^+ & \xrightarrow{\underline{b}} & \mathcal{CP}^+ \\ \Psi\downarrow & & \downarrow\Psi \\ \mathcal{TP}^+ & \xrightarrow{B} & \mathcal{TP}^+ \end{array}$$

Ció equivale a provare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\Psi \cdot \underline{a} = A \cdot \Psi \quad , \quad \Psi \cdot \underline{m} = M \cdot \Psi \quad , \quad \Psi \cdot \underline{b} = B \cdot \Psi.$$

Effettuiamone allora le tre verifiche. Ecco la prima:

$$\Psi(\underline{a}(m, n)) = \Psi(2m - n, m) = \begin{pmatrix} (2m - n)^2 - m^2 \\ 2(2m - n)m \\ (2m - n)^2 + m^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m^2 + n^2 - 4mn \\ 4m^2 - 2mn \\ 5m^2 + n^2 - 4mn \end{pmatrix}$$

$$A(\Psi(m, n)) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 - n^2 \\ 2mn \\ m^2 + n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m^2 + n^2 - 4mn \\ 4m^2 - 2mn \\ 5m^2 + n^2 - 4mn \end{pmatrix}$$

Ecco la seconda verifica:

$$\Psi(\underline{m}(m, n)) = \Psi(2m + n, m) = \begin{pmatrix} (2m + n)^2 - m^2 \\ 2(2m + n)m \\ (2m + n)^2 + m^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m^2 + n^2 + 4mn \\ 4m^2 + 2mn \\ 5m^2 + n^2 + 4mn \end{pmatrix}$$

$$M(\Psi(m,n)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 - n^2 \\ 2mn \\ m^2 + n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m^2 + n^2 + 4mn \\ 4m^2 + 2mn \\ 5m^2 + n^2 + 4mn \end{pmatrix}$$

Ecco infine la terza verifica:

$$\Psi(\underline{b}(m,n)) = \Psi(m+2n, n) = \begin{pmatrix} (m+2n)^2 - n^2 \\ 2(m+2n)n \\ (m+2n)^2 + n^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 3n^2 + 4mn \\ 2mn + 4n^2 \\ m^2 + 5n^2 + 4mn \end{pmatrix}$$

$$B(\Psi(m,n)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 - n^2 \\ 2mn \\ m^2 + n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 3n^2 + 4mn \\ 2mn + 4n^2 \\ m^2 + 5n^2 + 4mn \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora concludere con la seguente

Proposizione 16. *I due alberi ternari denotati con $\mathcal{CP}^+$ e $\mathcal{TP}^+$ sono uno la copia conforme dell'altro tramite la corrispondenza biunivoca $\Psi : \mathcal{CP}^+ \to \mathcal{TP}^+$, che riproduce la crescita tripartita di un albero nell'altro albero.*

Naturalmente un risultato analogo lega l'albero delle coppie di parametri secondo Euclide $\mathcal{CP}^-$ con l'albero delle terne dispari $\mathcal{TP}^-$ generate dalla terna $(4,3,5)$.

V. IL GRUPPO $\mathcal{TP}$ DI TUTTE LE TPP

In questo capitolo vedremo che si puó definire sull'insieme $\mathcal{TP} = \{\mathcal{TP}^-,\ (1,0,1)\ ,\ \mathcal{TP}^+\}$ di tutte le TPP (le terne dispari parametrizzate da Euclide e quelle pari parametrizzate da Diofanto) a cui si aggiunge la terna $(1,0,1)$, una struttura di gruppo commutativo. Proveremo che tale gruppo é un gruppo libero generato dalle terne che hanno come diagonale un numero primo congruo ad 1 modulo 4. Per fare ció interpretiamo le terne pitagoriche con l'aiuto dei numeri complessi.

Cominciamo col pensare le coppie (p,q) ed (m,n) dei parametri di Euclide e Diofanto come numeri complessi: $w = p + iq$ e $z = m + in$. Allora l'applicazione $\alpha : \mathcal{CP}^- \to \mathcal{CP}^+$ e la sua inversa α^{-1} funzionano cosí:

$$\alpha(w) = \frac{p+q}{2} + i \cdot \frac{p-q}{2} = \frac{1}{2}(1+i)\overline{w} \quad , \quad \alpha^{-1}(z) = (m+n) + i \cdot (m-n) = (1+i)\overline{z}.$$

Inoltre, se delle TPP (x,y,z) in $\mathcal{TP}^-$ ed in $\mathcal{TP}^+$ si considerano solo le prime due coordinate (x,y) che danno pure luogo a numeri complessi $x+iy$, per le applicazioni di parametrizzazione Φ e Ψ risulta:

$$\Phi(w) = \frac{p^2-q^2}{2} + ipq = \frac{w^2}{2} \qquad , \qquad \Psi(z) = m^2 - n^2 + i2mn = z^2.$$

Quindi in particolare il passaggio dai parametri di Diofanto (m,n) alle due coordinate della terna pitagorica associata avviene in ambiente complesso tramite elevamento al quadrato.

Osserviamo ora che le TPP (x,y,z) sono in corrispondenza biunivoca con i numeri complessi di modulo 1 a coordinate razionali positive x/z e y/z tramite l'applicazione

$$\epsilon : (x,y,z) \to \frac{x}{z} + i\ \frac{y}{z}.$$

Denotiamo con $\mathbf{TQ}$ il sottogruppo moltiplicativo del toro (i.e., dei numeri complessi di modulo 1 con l'usuale moltiplicazione complessa) formato dai numeri complessi a coordinate razionali e con $\mathbf{TQ}^+$ il sottoinsieme di $\mathbf{TQ}$ formato dai numeri a coordinate positive con l'aggiunta di 1, che corrisponde quindi biunivocamente all'insieme $\mathcal{TP}$ tramite la mappa ϵ. Questo insieme $\mathbf{TQ}^+$ non forma un sottogruppo di $\mathbf{TQ}$, non essendo un insieme chiuso per la moltiplicazione; ad esempio si ha:

$$(\frac{3}{5} + i\ \frac{4}{5}) \cdot (\frac{7}{25} + i\ \frac{24}{25}) = -\frac{3}{5} + i\ \frac{4}{5}.$$

Dovremo modificare la definizione di moltiplicazione in $\mathbf{TQ}^+$; per fare ció dobbiamo prima capire come é la struttura del gruppo $\mathbf{TQ}$. Ricordiamo a tal fine che un elemento di un gruppo moltiplicativo si dice *di torsione* se una sua potenza coincide con l'elemento neutro; un elemento che non é di torsione é detto *senza torsione.* Il gruppo $\mathbf{TQ}$ contiene gli elementi di torsione $1, i, -1, -i$; infatti $i^4 = 1, -1^2 = 1, (-i)^4 = 1$. Vediamo ora che nessun altro elemento di $\mathbf{TQ}$ é di torsione.

Proposizione 17. *Un elemento $\frac{x}{z} + i\ \frac{y}{z} \in \mathbf{TQ}$ diverso da $1, i, -1, -i$ é senza torsione.*

Dimostrazione. Sia $w = \frac{x}{z} + i\ \frac{y}{z} = cos\ \alpha + isen\ \alpha$, dove per ipotesi risulta $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Per ogni intero positivo n si ha: $w^n = cos\ n\alpha + isen\ n\alpha$. I punti sulla circonferenza unitaria del piano complesso rappresentati dai numeri w^n costituiscono le cuspidi di una ipocicloide generata dalla rotazione in senso antiorario di una circonferenza di raggio $r = \frac{\alpha}{2\pi}$. E' noto che l'ipocicloide é una curva chiusa (quindi una potenza di w diventa pari ad 1) se e solo se $r = \frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$. Poiché un multiplo razionale di π diverso da $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ non puó avere coseno e seno razionali, e poiché $cos\ \alpha$ e $sen\ \alpha$ sono razionali, segue che $r \notin \mathbb{Q}$ e quindi la nostra ipocicloide non é una curva chiusa. Possiamo perció concludere che nessuna potenza di w é pari ad 1 e quindi w é un elemento senza torsione. ///

I quattro elementi di torsione formano un sottogruppo, che denotiamo con $t(\mathbf{TQ})$. Nel gruppo quoziente $\overline{\mathbf{TQ}} = \mathbf{TQ}/\mathbf{t}(\mathbf{TQ})$ una classe laterale non nulla che contiene un elemento z é formata da

$z, iz, -z, -iz$, numeri che stanno nei quattro diversi quadranti del piano complesso. Se si sceglie come rappresentante di tale classe l'unico numero a coordinate entrambe positive e come rappresentante della classe elemento neutro il numero 1 si ha che $\overline{\mathbf{TQ}}$ é posto in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{TQ}^+$ e quindi con $\mathcal{TP}$.

Per mezzo di questa corrispondenza biunivoca $\overline{\mathbf{TQ}} \leftrightarrow \mathcal{TP}$ si puó trasferire la moltiplicazione del quoziente $\overline{\mathbf{TQ}}$ all'insieme $\mathcal{TP}$. Vediamo come funziona la convenzione che regola tale moltiplicazione.

Date due TPP (x, y, z) e (x', y', z'), si pone

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \\ zz' \end{pmatrix} \quad \text{se } \; xx' - yy' > 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy' + yx' \\ yy' - xx' \\ zz' \end{pmatrix} \quad \text{se } \; xx' - yy' \leq 0.$$

Quindi, se il prodotto di $x + iy$ per $x' + iy'$ ha coordinate positive, il prodotto delle due TPP é quello indotto dalla moltiplicazione complessa di $x+iy$ per $x'+iy'$; se invece il prodotto ha la prima coordinata negativa, quindi sta nel secondo quadrante, lo si riporta nel primo quadrante con una rotazione in senso anti-orario di $\pi/2$ radianti, cioé in $\mathbf{TQ}^+$, e da questo si ottiene il prodotto delle TPP.

Questo prodotto é evidentemente commutativo e l'elemento neutro é $(1, 0, 1)$, come si verifica subito. Bisogna peró avere anche un'altra avvertenza, perché il prodotto di due TPP puó dare una terna non primitiva, quindi bisogna passare alla TPP corrispondente. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 33 \\ 56 \\ 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1183 \\ 4056 \\ 4225 \end{pmatrix} = 13^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Quindi in questo caso il prodotto di $(33, 56, 65)$ per $(63, 16, 65)$ é la TPP $(7, 24, 25)$.

Un altro esempio importante é dato se si vuole calcolare l'inversa di una TPP (x, y, z). L'inversa é la TPP (y, x, z), giacché risulta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - yx \\ x^2 + y^2 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z^2 \\ z^2 \end{pmatrix};$$

dall'ultima terna, con la convenzione che regola il prodotto, bisogna passare a $(z^2, 0, z^2)$, e con l'avvertenza ricordata sopra da questa si passa alla terna elemento neutro $(1, 0, 1)$.

Si puó verificare direttamente che il prodotto di due terne pari o di due terne dispari produce una terna pari, mentre il prodotto di una terna pari per una dispari produce una terna dispari (come avviene nella usuale somma di numeri interi).

Avendo atteggiato $\mathcal{TP}$ a gruppo con la moltiplicazione definita sopra, la domanda che sorge subito é la seguente: che tipo di gruppo é il gruppo $\mathcal{TP}$? La risposta viene data dal seguente

Teorema 18. *Il gruppo $\mathcal{TP}$ é un gruppo commutativo in cui ogni elemento si scrive in modo unico come prodotto di TPP nella forma*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ p_1 \end{pmatrix}^{e_1} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ p_2 \end{pmatrix}^{e_2} \cdot \cdots \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ p_n \end{pmatrix}^{e_n}$$

dove, per ogni $i \leq n$, le diagonali p_i sono numeri primi congrui ad 1 modulo 4, valgono le disuguaglianze $a_i > b_i$, e gli esponenti e_i sono numeri interi.

Con la terminologia di teoria dei gruppi, il Teorema 18 dice che il gruppo $\mathcal{TP}$ é un gruppo abeliano libero generato dalle TPP del tipo (a, b, p), dove p é un numero primo congruo ad 1 modulo 4 e $a > b$. Omettiamo la dimostrazione, ricordando due risultati di teoria elementare dei numeri che vengono utilizzati:

- se (a, b, c) é una TPP, allora c é prodotto di numeri primi p che sono congrui ad 1 modulo 4;

- un numero primo p congruo ad 1 modulo 4 soddisfa a $p = r^2 + s^2$, con r ed s coprimi e di opposta paritá.

Nel corso della dimostrazione vengono poi provati i fatti seguenti:

- se $p = r^2 + s^2$ é un numero primo congruo ad 1 modulo 4, con $r > s$ coprimi e di opposta paritá, e $k \geq 1$ é un intero positivo, ci sono esattamente due TPP con p^k come diagonale:

$$\begin{pmatrix} r^2 - s^2 \\ 2rs \\ p \end{pmatrix}^k \quad \text{e la sua inversa} \quad \begin{pmatrix} 2rs \\ r^2 - s^2 \\ p \end{pmatrix}^k$$

Si noti che le due terne sono simmetriche l'una dell'altra; la prima sta nell'albero generato da $(3, 4, 5)$, la sconda in quello generato da $(4, 3, 5)$.

- se $p = r^2 + s^2$ e $q = u^2 + v^2$ sono numeri primi congrui ad 1 modulo 4 distinti, con $r > s$ coprimi e di opposta paritá e analogamente per $u > v$, ci sono esattamente quattro TPP distinte con $c = pq$ come diagonale:

$$\begin{pmatrix} r^2 - s^2 \\ 2rs \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \\ q \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} r^2 - s^2 \\ 2rs \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2uv \\ u^2 - v^2 \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2rs \\ r^2 - s^2 \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \\ q \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2rs \\ r^2 - s^2 \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2uv \\ u^2 - v^2 \\ q \end{pmatrix}.$$

Si noti che le quattro terne sono a due a due simmetriche; la prima e l'ultima stanno nell'albero generato da $(3, 4, 5)$, la seconda e la terza in quello generato da $(4, 3, 5)$.

Da ció si deduce che esistono esattamente 2^n diverse TPP che hanno una prefissata ipotenusa $c = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$ che si fattorizza nel prodotto di n potenze di primi distinti p_i. Queste TPP si ottengono come nel prodotto assicurato dal Teorema 18 per opportune terne (a_i, b_i, p_i), dando agli esponenti e_i il valore f_i oppure $-f_i$ in tutti i 2^n modi possibili. Metá di queste terne stanno nell'albero generato da $(3, 4, 5)$, l'altra metá é formata dalle terne ad esse simmetriche che stanno nell'albero generato da $(4, 3, 5)$.

ESEMPIO 1. Se $c = 325 = 5^2 \cdot 13$ si ha:

$p_1 = 5 = 2^2 + 1 \to a_1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 > b_1 = 2^2 - 1 = 3 \quad , \quad p_2 = 13 = 3^2 + 2^2 \to a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 > b_2 = 5.$

Le TPP con ipotenusa $c = 325$ sono le seguenti $2^2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 323 \\ 36 \\ 325 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 204 \\ 253 \\ 325 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 253 \\ 204 \\ 325 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 323 \\ 325 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 2. Abbiamo visto che, avendo l'avvertenza di identificare una terna non primitiva con la TPP ad essa associata, risulta

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} = 13^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 56 \\ 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \\ 65 \end{pmatrix}.$$

I due fattori non sono peró generatori del gruppo F come previsti dal Teorema 18. Risulta infatti:

$$\begin{pmatrix} 33 \\ 56 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 63 \\ 16 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Tenuto conto che $(5, 12, 13)$ á la terna inversa di $(12, 5, 13)$, ricaviamo la fattorizzazione prevista dal Teorema 18:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 24 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}^{2}.$$

VI. PITAGORA E LA METEMPSICOSI

Se andate su Wikipedia e cercate la voce "metempsicosi", tra le altre informazioni trovate la seguente.

Nell'ambito della filosofia occidentale, Pitagora e la sua scuola sembrano essere stati fra i primi a sostenere la dottrina della reincarnazione o metempsicosi, seppure sulla base di culti orfici preesistenti. L'uomo secondo i pitagorici é precipitato sulla terra a causa di una colpa originaria, per via della quale é costretto a trasmigrare da un corpo a un altro, non solo di umani, ma anche di piante e animali. Per liberarsi da questa catena di morti e rinascite occorre ritornare allo stadio di purezza originaria dedicandosi alla contemplazione disinteressata della veritá, praticando dei rituali esoterici di iniziazione e di catarsi, di purificazione. I pitagorici ritenevano che la vita del matematico fosse quella che piú si avvicinasse alla condizione libera e divina in cui l'anima si trovava prima della sua caduta.

Non v'é dubbio che un matematico che legga le ultime due righe di questo scritto ne possa trarre una certa soddisfazione, pensando che dopo morto la sua psiche non trasmigrerebbe in una pianta di cactus e neppure in una scimmia, ma piuttosto in un matematico con conoscenze piú ampie e piú profonde delle sue e piú vicino alla condizione divina.

Questo era quello che Pitagora pensava nel suo giardino una volta tornato a sedersi sulla panchina all'ombra dei due olmi con le biforcazioni tripartite, dopo avere avuto la folgorazione guardando il motivo geometrico formato dai mattoni della pavimentazione fatta dal contadino. Confidó quindi che alla sua morte la sua psiche non sarebbe trasmigrata in un cane, come era successo al suo amico Arimnesto, che gli era stato tanto caro da indurlo a chiamare il suo primogenito con lo stesso nome. Proprio il giorno prima lo aveva riconosciuto, quando aveva impedito ad un uomo che stava picchiando il suo cane di procedere in quel gesto insano. Quel povero animale oggetto di percosse gli aveva rivolto uno sguardo implorante, nel quale aveva riconosciuto senz'ombra di dubbio lo sguardo di Arimnesto. Questo gli aveva dato la forza di fermare il padrone del cane e di rimproverarlo in modo deciso, ancorché garbato, com'era nel suo stile.

"Spero proprio di non fare la fine di Arimnesto e di reincarnarmi in un altro matematico che ne sappia piú di me di terne di numeri simili a quella dei tiratori di corde egiziani, e che magari sappia trovare un legame profondo con il fatto che certi alberi hanno diramazioni tripartite", disse tra sé e sé. Si alzó e rientró soddisfatto in casa, pronto per annotare quello che aveva compreso quella mattina, perché altri ne facessero conoscenza. "L'ignoranza é una colpa da cui ci si libera con il sapere", andava ripetendo ai suoi discepoli, e quella formula che aveva scoperto gli procurava una grande senso di liberazione.

Lo stesso senso di liberazione provó Barning 2.492 anni piú tardi. Nel suo studio di Amsterdam, guardando dalla finestra che si affacciava sul parco della sua casa, in cui faceva bella mostra di sé un maestoso *populus alba* con le foglie tremolanti al vento, ripensó alla scoperta che aveva appena fatto delle tre matrici generatrici di tutte le terne pitagoriche primitive, uscite come per magia dal cilindro del prestigiatore, dando luogo a quel meraviglioso albero ternario con infinite ramificazioni che si alzava dalla terna $(3, 4, 5)$ cara a Pitagora e che emulava il *populus alba.* Non puó allora che nascere in noi questa domanda:

si é forse Pitagora reincarnato in Barning?

References

[1] F.J.M. Barning, *Over Pythagorese en bijna-Pythagorese driehoeken en een generatieproces met behulp van unimodulaire matrices*, Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk (1963).

[2] B. Berggren, *Pytagoreiska trianglar*, (in Swedish), Elementa: Tidskrift fr elementr matematik, fysik och kemi 17 (1934), 129139.

[3] F. R. Bernhart, H.L. Price, *Pythagoras' garden, revisited*, Australian Senior Mathematics Journal 26 (1) (2012), 29-40.

[4] E. Carraretto, *L'albero delle terne pitagoriche e la sua struttura gruppale*, tesi di Laurea Specialistica in Matematica, Universitá di Padova, A.A. 2008/2009.

[5] A. Hall, *Genealogy of Pythagorean Triads*, Math. Gazette 54, No. 390 (1970), 377-379.

[6] A.R. Kanga, *The family tree of Pythagorean triples*, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications 26, January/February 1990, 1517.

[7] J. Mack, V. Czernezkyj, *The tree in Pythagoras' garden*, Australian Senior Mathematics Journal 24 (2) (2010), 58-63.

[8] H. L. Price, Frank R. Bernhart, *Pythagorean Triples and a New Pythagorean Theorem*, arXiv:math/0701554v2 (2007), p. 21.

[9] H. L. Price, *The Pythagorean tree: A new species*, arXiv:0809.4324 (2010) p. 14.

[10] R. Saunders, T. Randall, *The Family Tree of the Pythagorean Triplets. Revisited*, The Mathematical Gazette, 78, No. 482 (1994), 190-193.

Indirizzo dell'autore:

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita" - Universitá degli Studi di Padova

Via Trieste 63, 35121 - Padova

$$d^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2 + a^2$$

figura 1

$$\gamma^2 = (\beta - \alpha)^2 + 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$$

Figura 2

(3,4,5)
(5,12,13)
(21,20,29)
(15,8,17)
(7,24,25)
(55,48,73)
(45,28,53)
(39,80,89)
(119,120,169)
(77,36,85)
(33,56,65)
(65,72,97)
(35,12,37)
(9,40,41)
(105,88,137)
(91,60,109)
(105,208,233)
(297,304,425)
(187,84,205)
(95,168,193)
(207,224,305)
(117,44,125)
(57,176,185)
(377,336,505)
(299,180,349)
(217,456,505)
(697,696,985)
(459,220,509)
(175,288,337)
(319,360,481)
(165,52,173)
(51,140,149)
(275,252,373)
(209,120,241)
(115,252,277)
(403,396,565)
(273,136,305)
(85,132,157)
(133,156,205)
(63,16,65)

Figura 3